

УДК 511:621.3

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ**Мазинова Л.Э., Попова С.В.***ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,
e-mail: mazinowal@mail.ru*

Теория комплексных чисел исторически вышла из потребностей математики, но в дальнейшем нашла широкое применение в технических дисциплинах. Разные формы записи комплексных чисел дают возможность решать задачи в зависимости от поставленных условий. Переход от одной формы к другой позволяет осуществлять формула Эйлера, связывающая тригонометрические формулы и экспоненту. Введение комплексных чисел позволяет более продуктивно и достаточно компактно решать задачи электротехники, выполняя действия с помощью формул или векторов. Метод комплексных амплитуд, с помощью которого описываются гармонические колебания в линейных электрических цепях, позволяет осуществить переход от реальных гармонических токов и напряжений к комплексным амплитудам, что, по сути, приводит к изучению реальных процессов в цепях с помощью комплексных чисел.

Ключевые слова: формула Эйлера, комплексные числа, расчёты в электротехнике**APPLICATION OF COMPLEX NUMBERS IN ELECTRICAL ENGINEERING****Mazinowa L.I., Popova S.V.***Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: mazinowal@mail.ru*

The theory of complex numbers has historically emerged from the needs of mathematics, but later it found wide application in technical disciplines. Different forms of recording complex numbers make it possible to solve problems depending on the set conditions. The transition from one form to another makes it possible to realize the Euler formula connecting trigonometric formulas and the exponential. The introduction of complex numbers makes it possible to solve the problems of electrical engineering more productively and fairly compactly, by performing actions with the help of formulas or vectors. The method of complex amplitudes, by means of which harmonic oscillations in linear electric circuits are described, allows the transition from real harmonic currents and voltages to complex amplitudes, which, in fact, leads to the study of real processes in chains by means of complex numbers.

Keywords: Euler's formula, complex numbers, calculations in electrical engineering

В математике чрезвычайно обширно используется решение задач с помощью комплексных чисел. Однако, что такое комплексные числа и как они нашли себя в электротехнике [4]?

Для начала рассмотрим формулу Эйлера. Это серьёзная и важная формула, которая объединяет тригонометрические функции $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ с экспонентой e^x – с функцией, которая не входит в состав периодических функций, но очень часто используется в электротехнике [1].

Формула Эйлера считается базовой формулой при вычислении комплексных напряжений токов в электротехнике [2].

Известно, что свойства большинства математических функций выводятся на множестве вещественных чисел, если они на этом множестве существуют. Но, например, уравнение

$$x^2 = -5$$

решения в области вещественных чисел не имеет.

Для того чтобы обеспечить решение таких уравнений, было введено понятие комплексного числа, включающего в себя не только вещественную, но и мнимую

часть, которая содержит мнимую единицу, по определению равную

$$i = \sqrt{-1}.$$

Если ввести допущение, что такое число существует, то всё равно очень много математических функций при невыполнении не выводятся за множество комплексных чисел, а продолжают рассматривать на множестве вещественных чисел. При этом остаётся немало задач, особенно прикладного характера, решение которых нужно производить с помощью комплексных чисел [5, 6, 8].

Комплексным числом Z в общем случае считают сумму пары чисел – вещественного числа x и произведения yi , где i – есть мнимая часть:

$$Z = x + yi.$$

Преимуществом комплексных чисел является то, что, практически, все математические операции над комплексными числами не выходят за множество комплексных чисел, то есть результат действия над комплексными числами можно выразить в виде комплексного числа.

Этим активно пользуются при расчётах в электротехнике. В математике для симво-

лического изображения мнимой единицы используют обозначение i , но в электротехнике же так принято обозначать ток, поэтому это обозначение заменяют на j , физический смысл же от этого не меняется:

$$Z = x + jy.$$

Вернёмся, применив эту формулу к тригонометрическим функциям, а именно к $\cos \varphi$.

Учтём, что любая функция $f(x)$ при определённых условиях представима в виде степенного ряда, то есть сводится к виду

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

При разложении функции $\cos \varphi$ в ряд Маклорена получим:

$$\cos \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k}}{(2k)!}.$$

Также распишем ряд Маклорена для функции $\sin \varphi$:

$$\sin \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1^k \varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Точно так разложим на ряд Маклорена функцию e^x и получим:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Предположим, что x принадлежит множеству комплексных чисел и $x = j\varphi$. Для того, чтобы получить формулу Эйлера разобьём этот ряд на два ряда по чётным и нечётным степеням k :

$$e^{j\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\varphi)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(j\varphi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

далее в первом и втором слагаемом путём элементарных преобразований вынесем за скобку j^{2n} и получим:

$$\begin{aligned} e^{j\varphi} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\varphi)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(j\varphi)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j^{2n} \varphi^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j j^{2n} \varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Учитывая то, что $j^2 = -1$, то получим следующее:

$$\begin{aligned} e^{j\varphi} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\varphi)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(j\varphi)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j^{2n} \varphi^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j j^{2n} \varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1^n \varphi^{2n}}{(2n)!} + j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1^n \varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ &= \cos \varphi + j \sin \varphi. \end{aligned}$$

Собственно говоря, мы получили формулу Эйлера, устанавливающую зависимость между экспонентой и тригонометрическими функциями и имеющую вид:

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

Эта формула существенно помогает упростить математические выражения в комплексной области. Так при описании электромагнитных процессов в цепях переменного тока приходится вычислять много непростых интегралов, что приводит к громоздкому решению. Оказалось, что выполнение поставленных задач упрощается при введении комплексных чисел [3, 7].

Комплексные числа можно представлять в разных формах записи – алгебраической, тригонометрической или показательной – в зависимости от постановки задачи, исходных данных и требуемых результатов, но благодаря формуле Эйлера легко переходить от одной формы записи к другой. Например, переменный ток в цепи можно записать по-разному:

$\dot{I} = a + jb$ – алгебраическая форма;

$\dot{I} = I_m (\cos \varphi_i + j \sin \varphi_i)$ – тригонометрическая форма;

$\dot{I} = I_m e^{j\varphi_i}$ – показательная форма.

При сложении токов в цепях с начальной фазой, равной нулю, сложностей не возникает. Но при сложении токов с разными начальными фазами простая, на первый взгляд, задача приводит к громоздким тригонометрическим вычислениям. Тогда как, используя переход к комплексным числам, эта же задача решается в несколько строк [9, 10].

Если решать задачи электротехники с помощью векторов, то опять же удобно перейти к комплексной записи токов или напряжений и выполнять построения на комплексной плоскости, где горизонтальная ось – ось вещественной части комплексного числа, а вертикальная – ось мнимой части этого же числа.

Комплексные числа также применяются для описания гармонических колебаний в линейных электрических цепях, при этом переход от реальных гармонических токов и напряжений к комплексным амплитудам выражает суть метода комплексных амплитуд, который является моделью исследуемых процессов, где на первое место выдвигаются амплитуды, а время и частоты отодвигаются на задний план. Переход к комплексным значениям позволяет компактно описать один объект сразу двумя величинами.

По сути, переход от реальных гармонических колебаний к комплексным амплитудам есть построение модели с помощью комплексных чисел, которые в этой модели носят названия — комплексный ток, комплексное напряжение, комплексная ЭДС.

Применение комплексных чисел позволяет:

- использовать законы, формулы и методы расчётов, применяющиеся в цепях постоянного тока, для расчёта цепей переменного тока;
- упростить некоторые вычисления, заменив графическое решение с использованием векторов на алгебраическое решение;
- рассчитывать сложные цепи, не решаемые другим путем;
- упростить расчеты цепей постоянного и переменного токов.

Список литературы

1. Вахтина Е.А., Габриелян Ш.Ж. Электротехника и электроника. — М.: Изд-во «Илекса», 2012.
2. Габриелян Ш.Ж., Вахтина Е.А., Шарипов И.К. Электротехника и электроника. — Ставрополь, 2012.
3. Гулай Т.А., Гринько А.Д., Пантелова Е.М. Математическая модель расчета в электрической цепи с несинусоидальными токами // Международный студенческий научный вестник. — 2017. — № 4-4. — С. 514-517.
4. Гулай Т.А., Невидомская И.А., Мелешко С.В. Анализ и оценка приоритетности разделов дисциплины «математический анализ» изучаемой студентами инженерных направлений // European Social Science Journal. — 2013. — № 8-2 (35). — С. 109-115.
5. Журавлёв И.В., Рыбалкин Н.А., Попова С.В. Применение средств математики для определения скорости катка ступенчатого блока // Международный студенческий научный вестник. — 2015. — № 3-4. — С. 463-465.
6. Математические модели и методы обработки измерительных сигналов емкостных преобразователей на постоянном токе / М.А. Мастепаненко, И.Н. Воронников, С.В. Аникеев, И.К. Шарипов. — Ставрополь, 2015.
7. Моделирование электрических временных параметров активатора импульсного электрического поля / В.И. Хайновский, Г.П. Стародубцева, Е.И. Рубцова, О.С. Копылова, П.В. Никитин, С.И. Любая // Вестник АПК Ставрополя. — 2016. — № 2 (22). — С. 39-44.
8. Попова С.В., Смирнова Н.Б. Влияние развивающих функций математических задач на эффективное обучение студентов вуза // Вестник АПК Ставрополя. — 2015. — № 1 (17). — С. 213-217.
9. Попова С.В., Шкабура А.С. Применение математического аппарата в профессии электроэнергетика / Аграрная наука Северо-Кавказскому федеральному округу: сборник научных трудов по материалам 81-й Ежегодной научно-практической конференции / Ответственный за выпуск Т.А. Башкатова, 2016. — С. 214-218.
10. Смирнова Н.Б., Попова С.В., Мамаев И.И. О прикладной ориентации курса математики в высшей школе // Учетно-аналитические аспекты и перспективы развития инновационной экономики: Международная научно-практическая конференция, 2010. — С. 270-272.