Секция «Современные проблемы комплекского анализа», научный руководитель – Беднаж В.А., канд. физ.-мат. наук, доцент

УДК 517.53

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕСОВЫХ ФУКЦИЙ

Беднаж В.А., Моргунова Е.Ю.

Брянский государственный университет им. академика И.Г. Петровского, Брянск,
e-mail: kowalewa.catia2013@yandex.ru

Теория функций одного переменного является одним из важнейших направлений в комплексном анализе и играет значительную роль как в классической, так и в современной математике. В теории функций одного комплексного переменного и ее многочисленных приложениях существенную роль играют пространства аналитических функций в единичном круге комплексной плоскости. Методы, разработанные в процессе решения задач, связанных с этими пространствами, нашли существенные приложения в теории рядов и интегралов Фурье, в теории сингулярных и интегральных операторов и других разделах комплексного и гармонического анализа. В представленной заметке приведен обзор некоторых результатов, касающихся весовых пространств в комплексной плоскости, рассмотрены некоторые аспекты теории весовых пространств аналитических в круге функций, а именно их интегральные представления.

Ключевые слова: измеримые функции, положительные функции, ограниченные функции, интегральное представление

INTEGRAL INTRODUCTION OF WEIGHT FUNCTIONS

Bednazh V.A., Morgunova E.Y.

Bryansk State University n.a. Academician I.G. Petrovsky, Bryansk,
e-mail: kowalewa.catia2013@yandex.ru

The theory of functions of one variable is one of the most important directions in complex analysis and plays a significant role in both classical and modern mathematics. In the theory of functions of one complex variable and its numerous applications, the spaces of analytic functions in the unit circle of the complex plane play an essential role. The methods developed in the process of solving problems related to these spaces have found significant applications in the theory of series and Fourier integrals, the theory of singular and integral operators and other sections of complex and harmonic analysis. In the present note provides an overview of some results concerning the weight spaces in the complex plane, we consider some aspects of the theory of weight spaces of analytic in terms of functions and their integral representations.

Keywords: measurable functions, positive functions, bounded functions, integral representation

Пусть Ω множество измеримых положительных функций ω на $\Delta=(0,1]$, для которых существуют числа $m_\omega, M_\omega,\ q_\omega$, причем $m_\omega, q_\omega \in (0,1]$, такие, что

$$m_\omega \le \frac{\omega(\lambda x)}{\omega(x)} \le M_\omega,$$

$$\forall x\in\Delta,\ \lambda\in[q_\omega,1]\ [1].$$

Очевидно, что произвольная положительная измеримая на [0,1] функция ω, отделенная от нуля и бесконечности на отрезке [0,1], принадлежит классу Ω. Отметим также, что функции вида

$$\omega(x)=x^\alpha(\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{n}\frac{c}{x})^\beta,\ x\in(0,1],$$

при всех $\alpha,\beta\in R$ также принадлежат классу Ω, а функции вида

$$\exp\left\{-\frac{1}{x^\sigma}\right\},\ x\in(0,1],\sigma>0,$$

не принадлежат данному классу [2].

В дальнейшем для краткости изложения будем опускать индексы чисел $m_\omega, M_\omega,\ q_\omega$. Рассмотрим класс Ω при

$$q=\frac{1}{2}.$$

В следующей теореме мы получим интегральное представление функции из класса

$$\Omega,\quad q=\frac{1}{2}.$$

Теорема 1.1. Класс Ω совпадает с классом функций ω, допускающих на Δ представление

$$\omega(x)=\exp\left\{\eta(x)+\int_x^1\frac{\varepsilon(u)}{u}du\right\},\ x\in\Delta,$$

где η и ε – ограниченные измеримые функции на Δ, причем

$$\frac{\ln m}{\ln 2} \le \varepsilon(x) \le \frac{\ln M}{\ln 2}.$$

Доказательство теоремы основано на ряде вспомогательных утверждений. [3]

Лемма 1.1. Если

$$\omega \in \Omega, \quad \lambda \in \left[\left(\frac{1}{2}\right)^p, \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} \right],$$

то $m^p \le \dfrac{\omega(\lambda x)}{\omega(x)} \le M^p,\ x \in \Delta.$

Доказательство. При $p = 1$ оценка следует непосредственно из определения класса Ω.

Предположим, что оценка установлена для некоторого $n \in N$, то есть для

$$\lambda \in \left[\left(\frac{1}{2}\right)^p, \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} \right]$$

справедливо

$$m^n \le \frac{\omega(\lambda x)}{\omega(x)} \le M^n,\ x \in \Delta.$$

Докажем аналогичную оценку при $n+1$.

Пусть

$$\lambda \in \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n, \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right].$$

Положим $\tau = 2\lambda$, очевидно, что

$$\tau \in \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right].$$

По предположению

$$m^n \le \frac{\omega(\tau x)}{\omega(x)} \le M^n,$$

$$\tau \in \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right].$$

Но поскольку $\lambda = \dfrac{1}{2}\tau$, и

$$\frac{\omega\left(\tau \frac{1}{2} x\right)}{\omega(x)} = \frac{\omega\left(\tau \frac{1}{2} x\right)}{\omega\left(\frac{1}{2} x\right)} \frac{\omega\left(\frac{1}{2} x\right)}{\omega(x)} \le M \frac{\omega\left(\tau \frac{1}{2} x\right)}{\omega\left(\frac{1}{2} x\right)},$$

то

$$m \frac{\omega\left(\tau \frac{1}{2} x\right)}{\omega\left(\frac{1}{2} x\right)} \le \frac{\omega\left(\frac{1}{2} \tau x\right)}{\omega(x)} =$$

$$= \frac{\omega\left(\tau \frac{1}{2} x\right)}{\omega\left(\frac{1}{2} x\right)} \frac{\omega\left(\frac{1}{2} x\right)}{\omega(x)} \le M \frac{\omega\left(\tau \frac{1}{2} x\right)}{\omega\left(\frac{1}{2} x\right)}.$$

Используя предположение индукции, получим оценку

$$m^{n+1} \le \frac{\omega\left(\tau \frac{1}{2} x\right)}{\omega(x)} \le M^{n+1},$$

то есть $m^{n+1} \le \dfrac{\omega(\lambda x)}{\omega(x)} \le M^{n+1},\ \lambda \in \left[\dfrac{1}{2}^{n+1}, \dfrac{1}{2}^{n} \right].$

Лемма 1.2. Пусть $r \in \Delta$ тогда существуют положительные числа $A = A(r)$, $B = B(r)$, такие, что

$$A(r) \le \omega(x) \le B(r), x \in [r,1].$$

Доказательство. Пусть

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p \le r < 1, p \in N.$$

По лемме 1.1.

$$m^p \le \frac{\omega(\lambda x)}{\omega(x)} \le M^p,$$

при

$$\lambda \in \left[\left(\frac{1}{2}\right)^p, \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}\right], \quad x \in \Delta.$$

Докажем, что аналогичная оценка верна и при всех

$$\lambda \in \left[\frac{1}{2}^k, \frac{1}{2}^{k-1}\right], \quad 1 \le k \le p.$$

Действительно, поскольку

$$0 < m \le 1, \quad 1 \le M < +\infty,$$

то $$m^p \le m^k \le M^k \le M^p.$$

Записывая теперь аналогичную оценку для произвольного *k*, получим:

$$m^p \le \frac{\omega(\lambda x)}{\omega(x)} \le M^p,$$

при всех

$$\lambda \in \left[\frac{1}{2}^k, \frac{1}{2}^{k-1}\right], x \in \Delta, k = 1, 2, ..., p.$$

Положив далее

$$x = 1, \ \lambda \in \left[\frac{1}{2}^p, 1\right],$$

получим:

$$m^p \le \frac{\omega(\lambda)}{\omega(1)} \le M^p,$$

то есть

$$\omega(1) m^p \le \omega(\lambda) \le M^p \omega(1),$$

$$\lambda \in \left[\frac{1}{2}^p, 1\right],$$

или

$$A(r) \le \omega(\lambda) \le B(r), \quad \lambda \in [r,1],$$

где $A(r) = m^p, B(r) = M^p$.

Доказательство теоремы 1.1.
Положим

$$\delta(x) = \frac{1}{\ln 2} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln\left(\frac{\omega(tx)}{\omega(x)}\right) \frac{dt}{t}, x \in \Delta. \quad (1.1)$$

Очевидно, что функция δ измерима и ограничена. Действительно,

$$m \le \frac{\omega(tx)}{\omega(x)} \le M,$$

$$t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

$$x \in \Delta,$$

поэтому, интегрируя по отрезку $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, получим:

$$\frac{\ln m}{\ln 2} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dt}{t} \le \delta(x) \le \frac{\ln M}{\ln 2} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dt}{t},$$

$x \in \Delta$, или $\ln m \le \delta(x) \le \ln M$.

Из равенства (1.1) непосредственно следует, что

$$\ln \omega(x) = -\delta(x) + \frac{1}{\ln 2} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln \omega(tx)}{t} dt.$$

Преобразуем последний интеграл:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln \omega(tx)}{t} dt = \int_{\frac{1}{2}x}^{x} \frac{\ln \omega(u)}{u} du.$$

Учитывая равенства

$$\int_{\frac{1}{2}x}^{x} \frac{\ln \omega(u)}{u} du = \int_{\frac{1}{2}x}^{q} \frac{\ln \omega(u)}{u} du +$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln \omega(u)}{u} du - \int_{x}^{1} \frac{\ln \omega(u)}{u} du =$$

$$= \int_{x}^{1} \frac{\ln \omega\left(\frac{1}{2}t\right)}{t} dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln \omega(t)}{t} dt - \int_{x}^{1} \frac{\ln \omega(t)}{t} dt$$

$$= \int_x^1 \frac{\ln \omega\left(\frac{1}{2}t\right)}{\omega(t)} \frac{dt}{t} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln \omega(t)}{t} dt,$$

имеем:

$$\ln \omega(x) = -\delta(x) + \frac{1}{\ln 2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln \omega(t)}{t} dt +$$

$$+ \frac{1}{\ln 2} \int_x^1 \ln \frac{\omega\left(\frac{1}{2}t\right)}{\omega(t)} \frac{dt}{t}.$$

Положив далее

$$\eta(x) = -\delta(x) + \frac{1}{\ln 2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln \omega(t)}{t} dt,$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{\omega\left(\frac{1}{2}t\right)}{\omega(t)}, \ t \in \Delta,$$

получим нужное представление, причем

$$\ln \frac{m\omega(1)}{M} \le \eta(x) \le \ln \frac{M\omega(1)}{m},$$

$$x \in \Delta,$$

$$\frac{\ln m}{\ln 2} \le \varepsilon(x) \le \frac{\ln M}{\ln 2}, \ x \in \Delta. \qquad (1.2)$$

В дальнейшем положим

$$h_\omega = \frac{\ln m}{\ln 2}, \ H_\omega = \frac{\ln M}{\ln 2}. \qquad (1.3)$$

Очевидно, что

$$h_\omega \le \varepsilon(x) \le H_\omega,$$

при этом $H_\omega > 0, \ h_\omega < 0.$

Следствие 1.1. Пусть

$$\alpha_\omega = -h_\omega = \frac{\ln \frac{1}{m}}{\ln 2},$$

$$\beta_\omega = H_\omega = \frac{\ln M}{\ln 2}.$$

Тогда при $0 < x < 1$ справедлива оценка

$$x^{\alpha_\omega} \le \omega(x) \le \frac{1}{x^{\beta_\omega}}.$$

Доказательство. Из оценок (1.2), (1.3) имеем

$$\omega(x) = \exp \int_x^1 \frac{\varepsilon(t)}{t} \le \exp H_\omega \ln \frac{1}{x},$$

то есть

$$\omega(x) \le \frac{1}{x^{\beta_\omega}}.$$

Аналогично, учитывая ограниченность функции ε снизу и оценку (1.2), получим

$$x^{\alpha_\omega} \le \omega(x), \ 0 < x < 1.$$

Список литературы

1. Шамоян Ф.А., Родикова Е.Г. О характеризации корневых множеств одного весового класса аналитических в круге функций // Владикавказский математический журнал. – 2014. – Т. 16: № 3. – С. 64–75.

2. Шамоян Ф.А., Шубабко Е.Н. Введение в теорию весовых L^p-классов мероморфных функций. – Брянск: Группа компаний «Десяточка», 2009.

3. Benedek A., Panzone R. The spaces Lp with mixed norm // Duke Math. – 1961. – V.28, №3. – PP.301–324.