УДК 656.11

# ОБЗОР МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ, ОПИСЫВАЮЩИХ ДВИЖЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

**Стрельников А.В.**

*ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный университет», Оренбург, e-mail: chodj@mail.ru*

Ученые выяснили, что по самым скромным подсчётам, человек теряет в пробках около 38 часов своей жизни в год. Поэтому актуальность проблемы, связанной с организацией дорожного движения, не вызывает сомнения. В данной статье рассматриваются четыре основных вида математических моделей, описывающих движение транспортных потоков: макро-, микро-, мезомодели и клеточные автоматы. С помощью данных моделей возможно обосновать целесообразность построения определенного вида транспортной развязки, расстановку дорожных знаков, светофоров, а также смоделировать возникновение дорожных заторов в результате ДТП, проводимых дорожных ремонтных работ или просто в «час-пик». К каждому виду приведены конкретные примеры моделей, проведён сравнительных анализ видов моделей. Эта статья послужит основой для создания модели, позволяющей оптимизировать транспортную сеть как городской среды, так и магистралей.

**Ключевые слова: математическое моделирование, дорожные заторы, транспортные потоки, транспорт**

# REVIEW OF MATHEMATICAL METHODS DESCRIBING THE MOVEMENTS OF TRANSPORT FLOWS

**Strelnikov A.V.**

*Orenburg State University, Orenburg, e-mail: chodj@mail.ru*

Scientists have found out that according to the most conservative estimates, the person loses in traffic jams about 38 hours of the life a year. Therefore the relevance of the problem connected with the organization of traffic doesn't raise doubts. In this article four main types of the mathematical models describing the movement of traffic flows are considered: macro-, micro-, mesomodels and cellular automatons. By means of these models it is possible to prove expediency of creation of a certain view of the traffic intersection, arrangement of road signs, traffic lights and also to simulate emergence of road jams as a result of road accident, the carried-out road repair work or just in «rush hour». To each look concrete examples of models are given, the analysis of types of models is carried out comparative. This article will form a basis for creation of the model allowing to optimize transport network of both the urban environment and highways.

**Keywords: mathematical modeling, road jams, traffic flows, transport**

Английский философ Роджер Бэкон однажды сказал: «Практика рождается из тесного соединения физики и математики». Действительно, окружающий нас мир живёт по законам физики, подкрепленным математическими формулами. Просто люди привыкли к этому, и поэтому даже не замечают. Все знают, что если что-то бросить или уронить, то это обязательно упадёт. Человечество давно пытается взять под контроль мир физических явлений, или хотя бы предсказать их последствия. Так, например, в 50–е годы прошлого века, с развитием исследования процессов, возникающих при взрыве бомбы, учёные углубились в изучении газовой динамики, которая стала основой изучения математических моделей движения транспорта. Так, появились первые макроскопические (гидродинамические) и микроскопические (например, следование за лидером) модели. Со временем количество таких моделей увеличивалось, вводились новые неизвестные, системы уравнений усложнялись, позволяя показывать наиболее адекватные схемы построения дорожной сети, прогнозировать загрузку тех или иных участков дороги, уменьшать затраты на передвижение пользователей этой сети.

Рассмотрим наиболее известные на сегодняшний день математические модели, описывающие движение транспортных потоков.

## Макроскопические модели

Одними из самых известных методов математического описания движения транспортного потока являются гидродинамические (макроскопические) модели транспортного потока.

В этом случае, транспортный поток рассматривают как поток одномерной сжимаемой жидкости, учитывая, что поток сохраняется и существует взаимно-однозначная зависимость между скоростью и плотностью транспортного потока [1]. То есть, чем выше плотность потока (чем больше машин на дороге), тем меньше средняя скорость потока.

Разработка этого метода началась очень давно, поэтому достижения классической гидродинамики стали мощным инструментом для изучения движения транспортного потока. Этот метод чаще всего используется для краткосрочных расчётов движения потока, например, для оптимизации светофорной сигнализации.

Модель Лайтхилла-Уизема-Ричардса. Одна из самых известных моделей транспортных потоков является модель Лайтхилла-Уизема-Ричардса (LWR). Для его описания используют закон сохранения массы (количества автотранспортных средств). При этом допускаются следующие допущения:

• транспортный поток непрерывен. Плотность (ρ) – это число машин, которые занимают единицу длины дороги;

• величина потока ($q$) – это число машин, которые пересекают отметку $x$ за единицу времени, и она определяется локальной плотностью $\rho : q = Q(\rho)$. При этом скорость потока:

$$v(\rho) = \frac{Q(\rho)}{\rho}.$$

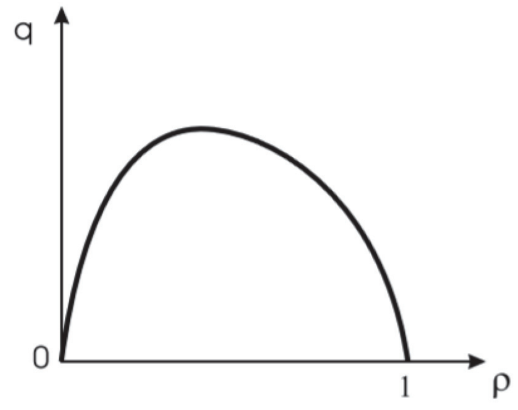
• количество транспортных средств на участке догори без разветвлений (съездов-въездов) сохраняется.

Модель Танака. Модель Танака – один из способов определения зависимости в фундаментальной диаграмме (рис. 1). В данной модели рассматривается движение транспорта по одной полосе. Предполагается также, что их скорость не превышает $v_{max}$. Плотность

$$\rho(v) = \frac{1}{d(v)},$$

где $d(v) = L + c_1 v + c_2 v_2$ – среднее расстояние между автомобилями для определённой скорости потока, $L$ – средняя длина транспортного средства, $c_1$ – время реакции водителей, $c_1$ – коэффициент, зависящий от тормозного пути: от состояния дорожного покрытия и погодных условий. Из зависимости $d(v)$ можно получить зависимость $V(\rho)$, удовлетворяющую условиям модели LWR.

Модель Уизема. В 1974 году Уизем предположил учесть так называемую дальнозоркость водителей. То есть водители двигаются с определённой скоростью, которая зависит от ситуации на дороге. Иначе говоря, при увеличении плотности потока впереди водители уменьшают скорость, а при уменьшении плотности – увеличивают скорость.




*Фундаментальная диаграмма транспортного потока*

Модель Пейна. В 1971 создаётся модель Пейна, которая является следующим шагом развития модели LWR. Она представляет собой обобщенный закон сохранения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0,$$

в котором между скоростью и плотностью нет прямой зависимости.

Модель Эйва-Раскла. Эйв и Раскл, учитывая недостатки модели Пэйна-Уизема, разработали новую модель. В её основу легли следующие тезисы:

1. Для описания модели используется система дифференциальных уравнений гиперболического типа;

2. Значения скорости и плотности, полученные в результате решения задачи Римана с произвольными неотрицательными граничными условиями, должны оставаться неотрицательными и не должны превышать максимально возможную скорость;

3. Собственные значения, полученные при решении задачи Римана с произвольными данными, не должны превосходить скорости потока. То есть, едущие сзади автомобили не оказывают влияния на впереди идущие транспортные средства;

4. Решение должно реалистичным. То есть, торможение вызывает волны сжатия, а ускорение – волны разрежения;

5. При низкой плотности потока автомобилей решение должно зависеть от исходных данных.

**Микроскопические модели**

Под микроскопическими моделями понимают модели, в которых моделируется поведение каждого автомобиля. Такой подход более точен, по сравнению с макромоделями, но этот подход требует больших вычислительных ресурсов.

Модель оптимальной скорости. Модель оптимальной скорости, или модель Бандо, имеет следующие особенности:

- водитель двигается с максимальной скоростью, поддерживая достаточное расстояние до впереди идущего автомобиля;
- водитель движется с оптимальной скоростью, с достаточным расстоянием до впереди идущего автомобиля.

Движение автомобиля задаётся через уравнение ускорения:

$$\dot{v}=\frac{d^2x}{dt^2}=\alpha\left[V_{optimal}\left(\Delta x\right)-v\right]$$

Модель следования за лидером Дженерал Моторс. Другим важным классом микроскопических моделей (наряду с моделями оптимальной скорости) являются модели следования за лидером.

В 1959 г. сотрудники концерна Дженерал Моторс Д. Газис, Р. Херман, Р. Потс предложили одну из первых нетривиальных микроскопических моделей однополосного транспортного потока, с помощью которой можно получить фундаментальную диаграмму [2]. Простейшим вариантом предложенной модели является следующая модель:

$$s_n^{''}\left(t+\tau\right)=\alpha\frac{s_{n+1}^{'}\left(t\right)-s_n^{'}\left(t\right)}{s_{n+1}\left(t\right)-s_n\left(t\right)},\alpha>0.$$

Модель «разумного водителя» Трайбера. Модели оптимальной скорости и следования за лидером можно объединить в одну общую микроскопическую модель разумного водителя (Intelligent Driver Model (IDM)):

$$s_n^{''}\left(t\right)=F(s_{n+1}\left(t\right)-s_n\left(t\right),s_{n+1}^{'}\left(t\right)-$$
$$-s_n^{'}\left(t\right),s_n^{'}\left(t\right)).$$

**Мезомодели**

Не смотря на разнообразие толкования мезомоделей, чаще всего под ними так называемые «кинетические модели». Данный метод основывается на выводе макроскопической модели из описания процесса микроскопического взаимодействия автомобилей с использованием кинетического уравнения. Таким образом, при мезомоделировании рассматривается поток транспорта в целом, не моделируя отдельно взятые автомобили. Но, при этом учитываются особенности поведения водителей.

Модель Пригожина-Больцмана. В модели Пригожина-Больцмана рассматриваются две функции распределения вдоль магистрали: для одного автомобиля – $f\left(x,v,t\right)$, для двух – $f_2\left(x,v,t,x^{'},v^{'},t\right)$. Пусть ожидаемое количество автомобилей в интервалах $\partial x$ и $\partial v$ во время $t$ – $f\left(x,v,t\right)\partial x\partial v$. Тогда пусть $f\left(x,v,t\right)\partial x\partial v\partial x^{'}\partial v^{'}$ будет равно ожидаемому количеству пар автомобилей таких, что первое будет находиться в окрестностях $x$ в интервале $\partial x$ и $v$ в интервале $\partial v$, а второе, соответственно, в окрестностях $x'$ в интервале $\partial x'$ и в окрестностях $v'$ в интервале $\partial v'$.

Уравнение Пригожина-Больцмана для потока трафика есть:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial x}\right)f\left(x,v,t\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}+\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{rel}.$$

Левая часть – оператор потока, применённый к функции распределения функции от одного АТС. Правая часть есть формула Пригожина, включающая в себя два различных распределения – процессов коллизии и процессов релаксации [3].

Модель Пригожина-Хермана. Херман и Пригожин обобщили модель газовой динамики последнего. Главное отличие данной модели заключается в модернизации правой части уравнения Пригожины-Больцмана. Программа каждого водителя как выражение от распределения желаемых скоростей остаётся независимой от локальной концентрации.

Модель Пригожина, несмотря на увлечение газовой динамикой, вызывала множество вопросов и критики. Две наиболее серьёзные критики:

1. Корректность члена, выражающего замедление, (авторы используют термин «взаимодействие») сомнительна при наличии очередей автомобилей. Это связано с тем фактом, что корреляция, присущая очередям, делает неверной предположение о хаотическом порядке взаимодействия автомобилей, лежащего в основе члена замедления кинетического уравнения Пригожина – Хермана;

2. Отсутствие производной в члене, выражающем релаксацию, вызывает вопросы, связанные с корректностью модели. Корректность выражения для времени релаксации, таким образом, не может быть доказана. Кроме того, также проблематично понять смысл значения времени релаксации и, таким образом, определить способ его экспериментального определения.

Модель Хелбинга. Чтобы избавиться от недостатков моделей, основанных на уравнении Пригожина, Хелбинг для описания транспортного потока использовал методы, которые используются при описании физики сыпучих материалов. Таким образом он получил уравнения типа Навье-Стокса. С помощью уравнения Павери-Фонтана и метода, аналогичного решению уравнений Эйлера для обычных жидкостей, Хелбинг вывел макроскопическое уравнение движение транспортного потока. Особенностью модели является зависимость равновесной скорости от плотности и средней скорости в точке взаимодействия.

### Клеточные автоматы

По сути, модель клеточных автоматов являются частным случаем микроскопических моделей описания движения транспортных потоков. Их главное отличие – дискретизация пространства и времени. Также стоит отметить, что данная модель интересна своей скоростью и своим сложным поведением в динамике, включая такие интересные феномены, как самоорганизующаяся критичность, формирование спиральных образцов, колеблющаяся или хаотическая последовательность состояний.

Высокая скорость и эффективность вычислений в сочетании со следующими свойствами делают эти модели идеально подходящими для параллельных вычислений:

- дискретизация пространства в идентичные ячейки (узлы решётки) $j$ размера $\Delta x$;
- конечное количество возможных состояний $g(x)$;
- параллельное обновление по времени $t = i\Delta t$ с элементарным шагом $\Delta t$;
- глобально применимые правила обновления;
- взаимодействия близкого порядка с конечным (небольшим) количеством соседних узлов.

Их применение в моделировании динамики дорожного движения вызвало колоссальную активность в связи с попытками понять причины нестабильности трафика, ответственные за рваный ритм движения и за заторы как на автострадах, так и в городах [4].

Среди перечисленных групп моделей транспортного потока стоит отметить мезомодели и клеточные автоматы. Именно они получили мощный толчок в развитии не только в теоретической части, но и в практической – на их основе пишутся программы имитации дорожного движения. Учитывая проблемы современных городов, а именно дорожные заторы в неудачно построенных участках или в час пик, также стоит сказать, что именно эти модели могут помочь для построения нового участка или обновления старого, установка светофора, расширение проезжей части и т.д. Данные сравнения всех четырёх групп приведены в таблице.

Мы рассмотрели основные методы математического описания движения транспортного потока, наиболее употребляемые специалистами при расчетах схемы построения дорожной сети. На самом деле, существует ещё огромное количество моделей и их вариации. Использование конкретного метода или их совокупности обуславливается масштабом транспортных потоков и особенностями тех или иных дорожных развязок. Некоторые модели подходят для планирования установки светофора и регулировки его работы, некоторые для постройки новой развязки, некоторые для построения целых магистралей. Использование совокупности моделей позволит провести более точные расчеты и планирование автодорог.

Данная тема с каждым годом становится всё более актуальной в связи с увеличением автомобилей на дорогах, а значит, и повышением плотности потоков, особенно в «час пик».

Практическое применение научных методов позволит не только повысить качество планирования строительства городских дорог и магистралей, но улучшить жизнь каждого из нас.

Учитывая особенности каждой модели, авторами планируется разработать модель, с помощью которой можно будет предсказать скорость и направление распространения уличных заторов, вызванных ДТП или различными ремонтными работами. Данная разработка будет иметь практическое значение, и может быть применима как в деятельности служб ГИБДД, так и аварийных комиссаров [5,6].

**Таблица 1**

Сравнительный анализ основных методов математического описания дорожных потоков

| Название группы моделей | Суть модели | Плюсы | Минусы | Особенности |
|---|---|---|---|---|
| Макромодели | Транспортный поток рассматривается как поток одномерной сжимаемой жидкости | Позволяет охватить большую часть дорожной сети, по сравнению с микромоделями | Высокая степень обобщения, например, смена полос или поворот, обычно не учитываются | Большинство моделей основывается на уравнениях классической гидродинамики |
| Микромодели | Моделируется поведение каждого автомобиля | Позволяет достичь более точного описания движения автомобилей | Требует больших вычислительных ресурсов при практическом применении, чувствительны к ошибкам | Учитывается связь автомобиля с автомобилями-«соседями», а также с элементами инфраструктуры дорожной сети |
| Мезомодели | Транспортный поток моделируется в целом, учитывая особенности поведения водителей | Позволяет охватывать большую территорию, учитывая особенности поведения водителя | Меньшая детализация по сравнению с микромоделями | Данные обновляются не каждый временной шаг, а только при изменении параметров сети или поведения автомобиля |
| Клеточные автоматы | Дискретизация пространства и времени | Высокая скорость и эффективность вычисления | Условность дискретизации пространства и времени | Самоорганизующаяся критичность, формирование спиральных образцов, колеблющаяся или хаотическая последовательность состояний |

### Список литературы

1. Ахмадинуров, М.М. Математические модели управления транспортными потоками: монография / М.М. Ахмадинуров, Д.С. Завалищин, Г.А. Тимофеева. – Екатеринбург: Изд-во УрГУПМ, 2011. – 120 с.

2. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: Учебное пособие. 2-е изд., испр. и доп. / Ф.В. Гасников и др.; Под ред. А.В. Гасникова. – М.: МЦНМО, 2013. – 428 с.

3. Швецов В.И. Математическое моделирование транспортных потоков / Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 11. – С. 3–46.

4. Бабичева Т.С. Методы математического и имитационного моделирования процессов локального взаимодействия в транспортных системах: автореферат дис. ... кандидата физико-математических наук: 05.13.18 / Бабичева Татьяна Сергеевна; [Место защиты: Ин-т прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН]. – М., 2015. – 23 с.

5. Воробьев А.Л. О принципах оптимального размещения экипажей аварийных комиссаров на территории города / А.Л. Воробьев, В.А. Лукоянов, В.А. Гарельский // Интеллект. Инновации. Инвестиции. – 2017. – № 11. – С. 8–11.

6. Воробьев А.Л. О наделении новыми функциями служб аварийных комиссаров в рамках экологической стандартизации городов / А.Л. Воробьев, Д.И. Явкина, В.А. Лукоянов // Фундаментальные исследования. – 2017. – № 3. – С. 25-29.