

*Секция «Актуальные вопросы информатики и прикладной математики»,
научный руководитель – Иванова Н.А., канд. техн. наук, доцент*

УДК 517.9

К ВОПРОСУ О ПРЕДЕЛЬНОМ ЦИКЛЕ СИСТЕМЫ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОГО ТИПА

Солодовник Н.В., Полянина А.С.

*Камышинский технологический институт, филиал ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный
технический университет», Камышин, e-mail: A.S.Polyanina@gmail.com*

В данной статье рассматривается метод конструирования систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с асимптотически устойчивыми интегральными кривыми. Подход к моделированию таких систем сводится к использованию функции Ляпунова. В фазовом пространстве системы наблюдается образование изолированных траекторий – устойчивых предельных циклов. Желаемые динамические свойства системы достигаются с помощью введения в структуру уравнений определенных стабилизирующих функций от переменных системы. Проведено численное моделирование типовых режимов системы при различных начальных условиях. При этом можно оценить время выхода траектории на предельный цикл. Полученные дифференциальные уравнения составляют систему автоколебательного типа и могут использоваться в качестве генераторов программных траекторий движения различных объектов управления.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, управление, устойчивость, предельный цикл

TO THE PROBLEM ON LIMIT CYCLE OF THE SELF-OSCILLATORY TYPE SYSTEM

Solodovnik N.V., Polyagina A.S.

*Kamyshin Technological Institute, branch of Volgograd State Technical University, Kamyshin,
e-mail: A.S.Polyanina@gmail.com*

This article discusses the method for constructing of systems of nonlinear ordinary first-order differential equations with asymptotically stable integral curves. The approach to modeling such systems is reduced to using the Lyapunov's function. In the phase space of the system isolated trajectories are observed. They are stable limit cycles. The necessary dynamic properties of the system are achieved by introducing into the structure of equations specific stabilizing functions of the system variables. Numerical modeling of typical modes of the system under various initial conditions is carried out. It is possible to estimate the exit time of the trajectory on the limit cycle. The obtained differential equations constitute the self-oscillatory type system and can be used as generators of program trajectories of movement of various control objects.

Keywords: differential equations, control, stability, limit cycle

В настоящее время в связи с решением современных задач управляемых колебательных процессов особое место занимает активно развивающаяся теория многоканальных генераторов различной природы в управляемой динамике механических систем. Важной задачей является создание систем управления, обеспечивающих устойчивое движение объекта по траекториям различного вида. Построенная в работе система имеет инвариантное асимптотически устойчивое многообразие, являющееся поверхностью уровня некоторой функции [1]. Траектории системы не могут пересечь многообразие, что приводит к стабилизации движений системы в его окрестности. В таких системах возникают автоколебания. Работа представляет интерес для траекторных задач в робототехнике [4], при управлении автоколебательными мультивибраторами.

В фазовом пространстве системы наблюдается образование устойчивых предельных циклов – траекторий движения точек стопы шагающего движителя [5]. Автоколебательные мультивибраторы относятся к генераторам релаксационного типа, у которых форма генерируемых колебаний резко отличается от синусоидальной.

Постановка задачи. Рассмотрим систему автоколебаний. Модель такого типа можно представить в следующем виде

$$\begin{cases} \dot{x}_{2i-1} = \pm \alpha_{2i} x_{2i}^{2m-1} + U_{2i-1}(\mathbf{X}), \\ \dot{x}_{2i} = \mp \alpha_{2i-1} x_{2i-1}^{2m-1} + U_{2i}(\mathbf{X}), \end{cases} \quad (1)$$

где $i = 1, 2$.

Построенная вектор-функция управления

$$\mathbf{U} = (U_1(\mathbf{X}), U_2(\mathbf{X}), U_3(\mathbf{X}), U_4(\mathbf{X}))^T$$

должна обеспечить стабилизацию системы по четырем каналам в окрестности многообразия Ω , определяемого уравнением

$$\sum_{i=1}^4 \frac{x_i^{2m}}{a_i^{2m}} = 1.$$

Требуемые управления с обратной связью ищутся в виде:
для каналов первой подсистемы

$$\begin{cases} U_1(X) = \beta_1 x_1 + \sum_{j=1}^2 (\beta_{2j-1,1} x_{2j-1}^{2m} x_1 + \beta_{2j,1} x_{2j}^{2m} x_1), \\ U_2(X) = \beta_2 x_2 + \sum_{j=1}^2 (\beta_{2j-1,2} x_{2j-1}^{2m} x_2 + \beta_{2j,2} x_{2j}^{2m} x_2); \end{cases}$$

для каналов второй подсистемы

$$\begin{cases} U_1(\mathbf{X}) = \beta_3 x_3 + \sum_{j=1}^2 (\beta_{2j-1,3} x_{2j-1}^{2m} x_3 + \beta_{2j,3} x_{2j}^{2m} x_3), \\ U_4(\mathbf{X}) = \beta_4 x_4 + \sum_{j=1}^2 (\beta_{2j-1,4} x_{2j-1}^{2m} x_4 + \beta_{2j,4} x_{2j}^{2m} x_4); \end{cases}$$

Далее задача сводится к нахождению управляющих параметров.

Метод решения. Применяя схему вывода [1], получим коэффициенты управления:
для первой подсистемы

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2ma_1^{-2m}, \alpha_2 = 2ma_2^{-2m}, \beta_1 = \pm 1, \beta_2 = \pm 1, \\ \beta_{2j-1,1} = \mp a_{2j-1}^{-2m}, \beta_{2j-1,2} = \mp a_{2j-1}^{-2m}, \beta_{2j,1} = \mp a_{2j}^{-2m}, \\ \beta_{2j,2} = \mp a_{2j}^{-2m}; \end{cases} \quad (2)$$

для второй подсистемы

$$\begin{cases} \alpha_3 = 2ma_3^{-2m}, \alpha_4 = 2ma_4^{-2m}, \beta_3 = \pm 1, \beta_4 = \pm 1, \\ \beta_{2j-1,3} = \mp a_{2j-1}^{-2m}, \beta_{2j-1,4} = \mp a_{2j-1}^{-2m}, \beta_{2j,3} = \mp a_{2j}^{-2m}, \\ \beta_{2j,4} = \mp a_{2j}^{-2m}; \end{cases} \quad (3)$$

где $j = 1, 2$.

Для этого использовалось следующее условие инвариантности многообразия Ω :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \left((\pm \alpha_{2i} x_{2i}^{2m-1} + U_{2i-1}^{\mp}(\mathbf{X})) \frac{\partial F(X)}{\partial x_{2i-1}} + (\pm \alpha_{2i} x_{2i}^{2m-1} + U_{2i-1}^{\mp}(\mathbf{X})) \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial x_{2i-1}} \right) = \\ = 2m \sum_{i=1}^2 \left(\frac{x_{2i-1}^{2m}}{\alpha_{2i-1}^{2m}} + \frac{x_{2i}^{2m}}{\alpha_{2i}^{2m}} \right) \left(1 - \sum_{i=1}^{2n} \frac{x_i^{2m}}{\alpha_i^{2m}} \right), \end{aligned}$$

где знаки "-" либо "+" берутся перед коэффициентами управляющих функций $U_{2i-1}^{\mp}(\mathbf{X})$, $U_{2i}^{\mp}(\mathbf{X})$, в зависимости от того "+" либо "-" стоят перед членами первой степени x_{2i-1} , x_{2i} , $i = 1, 2$, управления.

Таким образом, при выполнении соотношений (2), (3) на управляемые параметры, поверхность Ω будет являться инвариантным многообразием системы (1).

В частности, управления

$$\begin{cases} U_{2i-1}^-(\mathbf{X}) = x_{2i-1} + \sum_{j=1}^2 (\beta_{2j-1,1} x_{2j-1}^{2m} x_{2i-1} + \beta_{2j,1} x_{2j}^{2m} x_{2i-1}), \\ U_{2i}^-(\mathbf{X}) = x_{2i} + \sum_{j=1}^2 (\beta_{2j-1,2} x_{2j-1}^{2m} x_{2i} + \beta_{2j,2} x_{2j}^{2m} x_{2i}); \end{cases}$$

при $i = 1, 2$, будут стабилизировать траектории движения в окрестности многообразия Ω .

Следовательно, поверхность Ω является инвариантным асимптотически устойчивым многообразием [3] системы управления (1).

Численное моделирование. В работе рассмотрен ряд таких моделей автоколебательного типа посредством изменения значений коэффициентов функций управления. Каждый из случаев был проиллюстрирован при различных начальных условиях:

$$\mathbf{X}^{(1)}(0,5 \cdot 10^{-3}, 0,9 \cdot 10^{-3}, 0,3 \cdot 10^{-3}, 0,7 \cdot 10^{-3}),$$

$$\mathbf{X}^{(2)}(0,1 \cdot 10^{-2}, 0,18 \cdot 10^{-2}, 0,9 \cdot 10^{-3}, 0,14 \cdot 10^{-2}),$$

$$\mathbf{X}^{(3)}(0,5 \cdot 10^{-2}, 0,9 \cdot 10^{-2}, 0,3 \cdot 10^{-2}, 0,7 \cdot 10^{-2}),$$

$$\mathbf{X}^{(4)}(0,5 \cdot 10^{-1}, 0,9 \cdot 10^{-1}, 0,3 \cdot 10^{-1}, 0,7 \cdot 10^{-1})$$

$$\mathbf{X}^{(5)}(0,1, 0,18, 0,06, 0,14).$$

Например, при начальных условиях $\mathbf{X}^{(1)}$, $\mathbf{X}^{(4)}$, интегральные трубки в подпространстве первой подсистемы приведены на рис. 1, второй подсистемы – на рис. 2.

По фрагментам численного моделирования, отвечающим различным начальным

условиям, в каждой из рассмотренных задач можно оценить время стабилизации траекторий движения. Устойчивые предельные циклы, принадлежащие этим поверхностям, представляют собой замкнутые гладкие кривые по форме, близкой к прямоугольной.

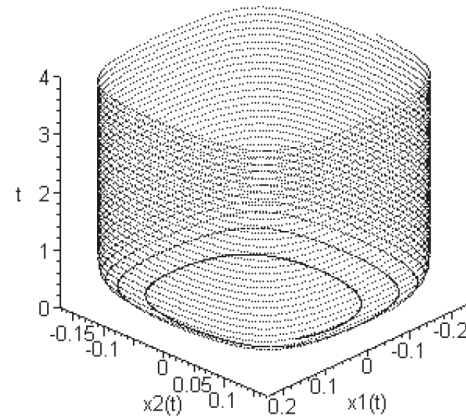
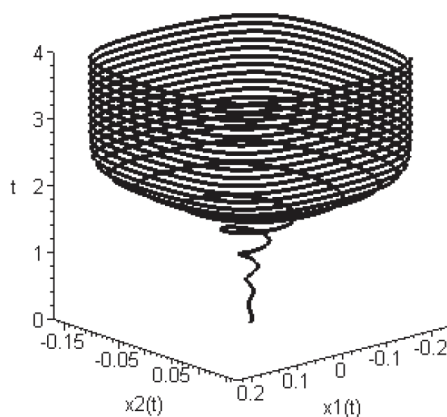


Рис. 1. Интегральные трубки в подпространстве $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \subset \mathbf{R}^4$

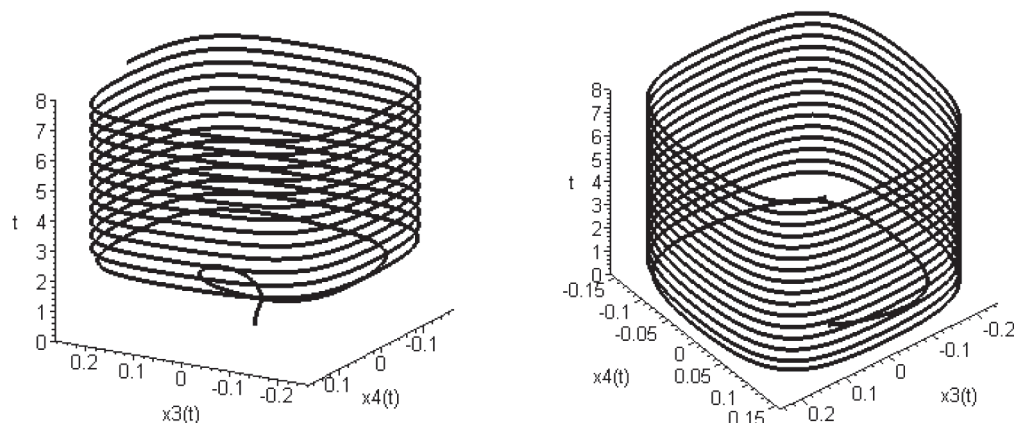


Рис. 2. Интегральные трубки в подпространстве $X_3 \times X_4 \subset \mathbb{R}^4$

Закключение. Получены стабилизирующие управления для решения задач управления нелинейными системами. Результаты проведенных исследований могут быть использованы при проектировании систем управления робототехническими комплексами, при проектировании детектирующих устройств переходных процессов движения по траекториям с участками близкими к прямолинейным [3, 4].

Список литературы

1. Горобцов, А.С. Синтез интегральных поверхностей Ламэ и стабилизация колебаний в их окрестностях / А.С. Горобцов, Е.Н. Рыжов, А.С. Чурзина // Динамика сложных систем. – 2009. – Т. 3, № 1. – С. 59–62.

2. Горобцов А.С. Детектирование колебаний, близких к разрывным / А.С. Горобцов, Е.Н. Рыжов, А.С. Чурзина // Биомедицинская радиоэлектроника. – 2009. – № 8. – С. 32–34.

3. Зубов И.В. Методы анализа динамики управляемых систем. – М., 2003. – 224 с.

4. Gorobtsov A. About formation of the stable modes of the movement of multilink mechanical systems / A. Gorobtsov, E. Ryzhov, A. Polyanina // Vibroengineering Procedia. Vol. 8: proc. of 22nd International Conference on Vibroengineering (Moscow, Russia, 4–7 October 2016) / Publisher JVE International Ltd. – Kaunas (Lithuania), 2016. – P. 522–526.

5. Gorobtsov A., Polyanina A., Andreev A. The Use of the Limit Cycles of Dynamic Systems for Formation of Program Trajectories of Points Feet of the Anthropomorphic Robot. World Academy of Science, Engineering and Technology, International Science Index 126 // International Journal of Electrical, Computer, Energetic, Electronic and Communication Engineering. – 2017. – 11(6). – 717 – 720.