УДК 534:621.373

КАЧЕСТВЕННЫЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ГЕНЕРАТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ

Яблокова А.А., Полянина А.С.

Камышинский технологический институт, филиал ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный технический университет», Камышин, e-mail: alex9.v@yandex.ru

В работе исследуются возможные переходные процессы для уравнения генератора Ван дер Поля. Уравнение Ван дер Поля имеет нулевое и периодическое решения. Такая система описывает режим автоколебаний. В зависимости от управляющего параметра форма автоколебаний будет близка к гармонической или иметь релаксационный вид. При автоколебаниях имеет место приток энергии в систему. Причем источник энергии не обладает колебательными свойствами. Автоколебания описываются нелинейными дифференциальными уравнениями с устойчивыми предельными циклами. Все фазовые траектории, выходящие из различных точек фазовой плоскости, стремятся к предельному циклу. В работе выполнено численное моделирование фазовых портретов и форм колебаний системы. Проведено качественное исследование движения фазовых траекторий, которое иллюстрирует результаты анализа устойчивости системы в линейном приближении.

Ключевые слова: генератор, состояние равновесия, устойчивость, автоколебания, предельный цикл

QUALITATIVE APPROACH TO RESEARCH OF THE VAN DER POL GENERATOR STABILITY

Yablokova A.A., Polyanina A.S.

Kamyshin Technological Institute, branch of Volgograd State Technical University, Kamyshin, e-mail: alex9.v@yandex.ru

In work possible transient processes for the Van der Pol generator equation are considered. The Van der Pol equation has zero and periodic solutions. Such system describes the self-oscillation mode. Depending on the control parameter the form of the self-oscillations will be close to harmonical or have a relaxation form. In self-oscillations there is an inflow of energy into the system. And the power source has no oscillatory properties. Self-oscillations are described by nonlinear differential equations with stable limit cycles. All phase trajectories coming out of different points of the phase plane aspire to a limit cycle. In work numerical modeling of phase pictures and forms of oscillations of the system is executed. The qualitative research of the motion of phase trajectories which illustrates results of the analysis of stability of system in linear approximation is conducted.

Keywords: generator, equilibrium state, stability, self-oscillations, limits cycle

Наряду с колебательными системами, в которых энергия с течением времени может только уменьшаться из-за диссипации, существуют и такие, в которых возможно пополнение энергии колебаний за счет неустойчивостей. Это может иметь место, когда система в состоянии обмениваться с окружающей средой энергией или веществом, т.е. является энергетически открытой [3].

В открытых системах возникают автоколебания. Это незатухающие колебания в нелинейных диссипативных системах, характеристики которых – амплитуда, частота, форма колебаний определяются параметрами самой системы и не зависят от конкретных начальных условий.

В общих чертах понять природу этого явления – режима автоколебаний можно с помощью качественных соображений.

С течением времени фазовые траектории системы автоколебаний стремятся к некоторому притягивающему множеству – аттрактору. В случае периодических автоколебаний в фазовом пространстве системы наблюдаются устойчивые предельные циклы.

Осциллятор Ван дер Поля**:** условия устойчивости состояния равновесия. Основной математической моделью при исследовании периодических автоколебательных систем является уравнение осциллятора Ван дер Поля:

$$\ddot{q} - \lambda(1 - q^2)\dot{q} + q = 0, \qquad (1)$$

где q – динамическая переменная; λ – постоянная величина, управляющая возбуждением автоколебаний. Рассмотрим случай мягкого самовозбуждения системы, когда после сколь угодно малого начального возмущения состояния равновесия наблюдаются колебания с малыми амплитудами. Пока колебания малы и выполняется неравенство $1 - q^2 > 0$, второе слагаемое уравнения Ван дер Поля будет оказывать дестабилизирующее действие, и колебания будут возрастать. Но с их увеличением указанное неравенство станет нарушаться и коэффициент при $\dot{q}$

будет положительным в тех интервалах времени, в которых $1-q^2<0$. В этих интервалах времени второе слагаемое уравнения будет оказывать демпфирующее влияние. При дальнейшем возрастании колебаний демпфирующее действие будет увеличиваться, и движение системы станет приближаться к стационарному режиму, которому соответствует взаимная компенсация дестабилизирующего и демпфирующего влияний [5]. Движение системы будет стремиться к режиму автоколебаний, которому соответствует постоянное значение амплитуды (рис. 1).

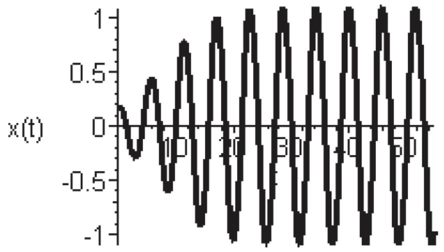

Рис. 1. Автоколебательный режим

При определении условий возникновения автоколебаний важно знать, какие состояния равновесия существуют в системе, и как меняется характер их устойчивости в зависимости от управляющих параметров [3].

Для нахождения точек равновесия и определения характера их устойчивости в осцилляторе Ван дер Поля, обычно рассматривается уравнение (1) в виде

$$\ddot{x}-(\lambda-x^2)\dot{x}+x=0,$$

или, по-другому, в форме системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=(\lambda-x^2)y-x.\end{cases}$$

Для нахождения особых точек – положений равновесия решается система уравнений

$$\begin{cases}y=0,\\ (\lambda-x^2)y-x=0.\end{cases}$$

Система имеет только тривиальное решение – единственную точку покоя $\mathbf{0}=(0,0)^T$.

Для определения устойчивости состояния равновесия рассматривают линеаризованную систему в окрестности точки $\mathbf{0}=(0,0)^T$. Матрицу линеаризации системы вычисляют по формуле

$$I(0,0)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\dot{x}(0,0)}{\partial x} & \dfrac{\partial\dot{x}(0,0)}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial\dot{y}(0,0)}{\partial x} & \dfrac{\partial\dot{y}(0,0)}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & \lambda\end{bmatrix}.$$

Для анализа поведения фазовых траекторий в локальной окрестности состояния равновесия $\mathbf{0}=(0,0)^T$ учитываются собственные значения матрицы линеаризации [3, 4]:

1. Если $\lambda<-2$, тогда собственные значения матрицы – отрицательные действительные числа. Состояние равновесия представляет собой устойчивый узел.

2. Если $-2<\lambda<0$, тогда собственные значения матрицы – комплексно-сопряженные числа с отрицательной действительной частью. Состояние равновесия – устойчивый фокус.

3. Если $0<\lambda<2$, тогда собственные значения матрицы – комплексно-сопряженные числа с положительной действительной частью. Состояние равновесия является неустойчивым фокусом.

4. Если $\lambda>2$, тогда собственные значения являются действительными положительными числами. Состояние равновесия представляет собой неустойчивый узел.

Численное моделирование**.** Описанное поведение фазовых траекторий осциллятора Ван дер Поля относительно состояния равновесия $\mathbf{0}=(0,0)^T$ проиллюстрированы с использованием численного моделирования. На рисунках представлены фазовые портреты и формы колебаний динамических переменных осциллятора.

Для случая $\lambda<-2$ мы действительно наблюдаем, что начало координат $\mathbf{0}=(0,0)^T$ является особой точкой типа устойчивый узел (рис. 2).

На рис. 3 при $-2<\lambda<0$ фазовая траектория представляет собой спираль, скручивающуюся к точке $\mathbf{0}=(0,0)^T$ – устойчивому фокусу.

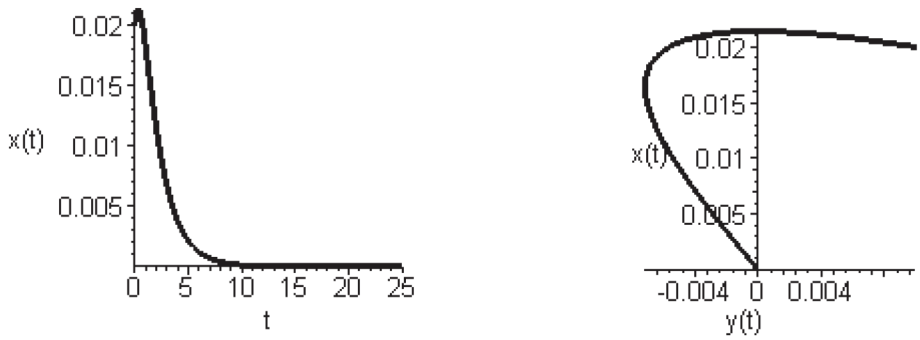

Рис. 2. Форма колебаний и фазовый портрет для осциллятора Ван дер Поля при $\lambda < -2$

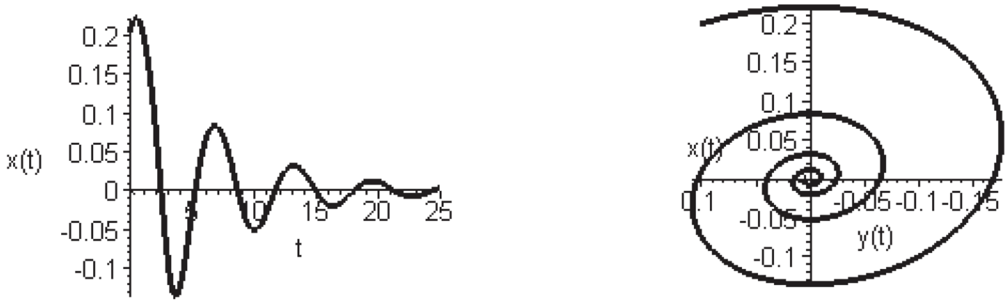

Рис. 3. Форма колебаний и фазовый портрет для осциллятора Ван дер Поля при $-2 < \lambda < 0$

Если $\lambda > 0$, то состояние равновесия в начале координат теряет свою устойчивость (рис. 4, 5).

Замкнутые кривые, к которым неограниченно приближаются все фазовые траектории, описывают стационарные режимы автоколебаний и являются устойчивыми предельными циклами. Их областью притяжения служит вся фазовая плоскость.

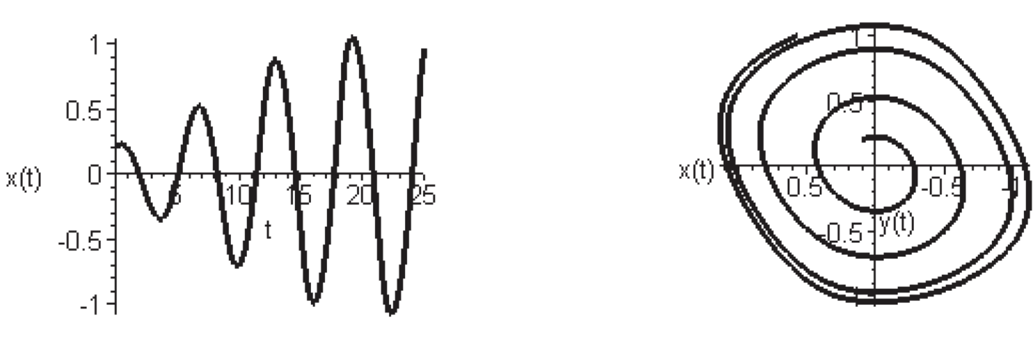

Рис. 4. Форма колебаний и фазовый портрет для осциллятора Ван дер Поля при $0 < \lambda < 2$

При малых положительных λ предельный цикл имеет форму близкую к эллипсу. Форма автоколебаний будет близка к гармонической (рис. 4). При увеличении λ предельный цикл меняет свою геометрию, искажается. Форма автоколебаний будет иметь релаксационный вид (рис. 5). При $\lambda > 0$ меняется и характер состояния равновесия $\mathbf{0} = (0,0)^T$: неустойчивый фокус переходит в неустойчивый узел.

электромагнитных колебаний [3]. Современная теория синтеза структуры нелинейной колебательной системы для получения устойчивых предельных циклов развивается в направлении усложнения геометрии циклов и увеличения их числа (многоканальные системы). Задача создания методов синтеза автоколебательных режимов для многомерных систем остается актуальной [1, 2].

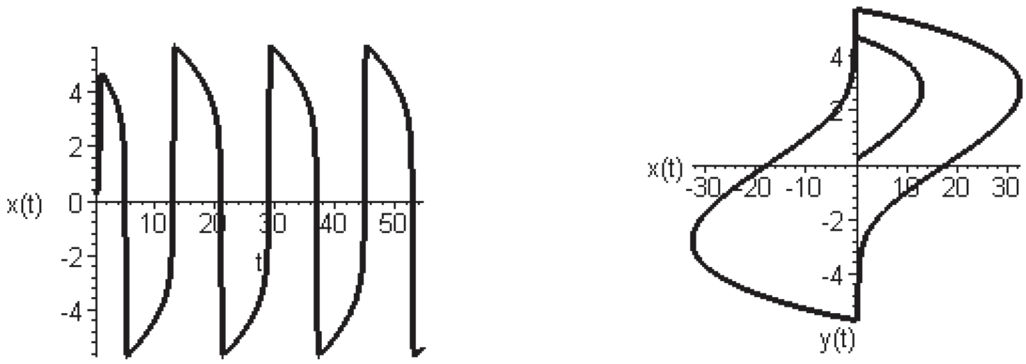

Рис. 5. Форма колебаний и фазовый портрет для осциллятора Ван дер Поля при $\lambda > 2$

Заключение

В работе было проведено качественное исследование решений уравнения Ван дер Поля, описывающих переход от состояния неустойчивого равновесия к устойчивому предельному циклу. Генератор Ван дер Поля является достаточно простой и общей моделью периодических автоколебаний. Наиболее частое применение это уравнение находит в радиофизике при построении автогенератора

Список литературы

1. Горобцов, А.С. Многофункциональные генераторы автоколебаний / А.С. Горобцов, Е.Н. Рыжов, А.С. Чурзина // Известия ВолгГТУ. – 2011. – Вып. 11, № 9. – С. 19–22.
2. Горобцов, А.С Детектирование колебаний, близких к разрывным / А.С. Горобцов, Е.Н. Рыжов, А.С. Чурзина // Биомедицинская радиоэлектроника.-2009. – № 8. – С. 32–34.
3. Кузнецов, А.П. Нелинейные колебания / А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.М. Рыскин. – М.: Изд-во «Физматлит», 2005. – 290 с.
4. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.: Изд. – во Едиториал УРСС , 2004. – 552 с.
5. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1991. – 246 с.