

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕПЛООБМЕНА ПОСРЕДСТВАМ МЕТОДА РЕКФОРДА-ПИСМЕНА

Е.В.Иванова, О.А. Торшина

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова».  
Магнитогорск. Россия.e-mail:olganica@mail.ru

**Аннотация.** Численные методы демонстрируют собой отдельную математическую область, и используются при программировании различных прикладных задач. При помощи численных методов возможно решение проблем в различных областях человеческой деятельности. Процесс решения сложных задач, представляется в виде последовательных этапов. Сначала рассматривается физическая постановка задачи, в которой разбирается и формулируется задача с точки зрения физического процесса. В этом случае, надо ознакомиться с рассматриваемой проблемой и с данной областью знаний. Затем переходим к математической постановке задачи. На данной стадии необходимо перефразировать физическую постановку задачи на математическую модель, то есть представить в виде формул, интегралов, различных систем уравнений и т.д. В математической модели должны отражаться основные законы физического процесса. Для некоторых задач на данной стадии можно остановиться, если задача является простой. Далее идет метод непрерывной математики, на котором проблема рассматривается в общем виде и рассматривается при помощи математических формул, то есть используются не конечные числа, а функции и общие величины. Затем численной решение, решение поставленной задачи представляется в виде конечных математических операций, результаты представлены в виде числовых значений. На этапе алгоритмизации происходит описание действий в виде точного формального описания процесса, алгоритм изображается в виде блок-схемы или другим способом. При программировании осуществляется реализация данной задачи на языке программирования высокого уровня. Затем идет отладка программы, проведение расчетов и анализ результатов. В данной статье рассматривается численное решение математического моделирования теплообмена между струей с высокой температурой и пластиной. В данной статье составляется физическая модель задачи, затем математическая, а после осуществляется переход к численному решению с помощью метода Рекфорда-Писмена.

**Ключевые слова:** начально-краевая задача, метод расщепления по пространственным координатам, численные методы, метод прогонки, математическое моделирование.

## MATHEMATICAL MODELING OF THE HEAT EXCHANGE PROCESS BY MEANS OF THE RECORD-PISMEN METHOD

E.V. Ivanova, O.A. Torshina

Federal State Budgetary Establishment of Higher Professional Education Magnitogorsk State

Technical University G.I.Nosova,

Magnitogorsk,e-mail:katya97.2010@mail.ru

**Annotation.** Numerical methods present a separate mathematical area and are used in the programming of various applied tasks. With the help of numerical methods it is possible to solve tasks of in various fields of human activity. It is possible to present the process of solving difficult tasks in the form of successive stages. First, physical formulation of the task is considered in which the task is analyzed and formulated from the point of view of the physical process. In this case it is important to understand the considered problem and know the scientific area. Then we proceed to the mathematical formulation of the task. At this stage it is necessary to rephrase the physical formulation of the problem to a mathematical model, that is to present it in the form of formulas, integrals, various systems of equations, etc. It's important that the basic laws of the physical process should be carefully depicted in the mathematical model. If the task is simple you can stop at this stage, Then comes the method of continuous mathematics where the problem is considered in general and on the bases of mathematical formulas when not finite numbers but functions and common quantities are used. Then comes the numerical solution: the solution of the problem is represented in the form of finite mathematical operations, the results are presented in the form of numerical values. At the stage of algorithmization the actions are described in the form of exact formal description of the process, the algorithm is depicted in the form of a flowchart or the

other way. When programming this task is implemented at a high-level programming language. Then there is the correction of the program, calculations and the analysis of the results. The article deals with the problem of the numerical solution of the mathematical modeling of the heat transferred between a jet with a high temperature and a plate of structural material. In the article the physical model of the task is made, then the mathematical one and then there is the numerical solution of the task with the Recford-Pismen method. Keywords: initial-boundary value problem, splitting method by spatial coordinates, numerical methods, sweep method, mathematical modeling.

В данной статье будет рассмотрена задача теплообмена между струей с большим показателем температуры и пластиной, внешняя поверхность которой подвержена воздействию двухфазной или однофазной струи начальными данными. Рассмотрим данную задачу с физической стороны [1]. Схема взаимодействия сверх высокотемпературной струи с преградой представлена на рисунке 1, где  $x$  – ось абсцисс,  $y$  – ось ординат;  $L_x$  – ширина пластины;  $L_y$  – толщина пластины;  $l_g$  – длина воздействия струи;  $Q_g$  – поток с высокой температурой; A, B, C, D, E – граничные точки. Сконструируем математическую модель теплообмена между струей с высокой температурой и пластиной [3]. Произведем числовое решение данной задачи.

При решении данной задачи не будем принимать во внимание:

- 1) допустимые процессы окисления и плавления материала преграды активными компонентами газового потока;
- 2) радиационная составляющая в теплообмен;
- 3) вложение радиационной составляющей в теплообмене на внешние плоскости;
- 4) характеристики теплофизике ( $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $c$ ), которые являются постоянными.

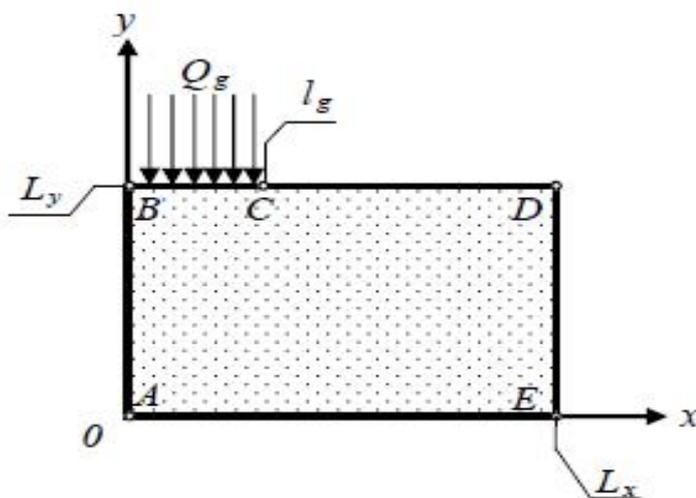


Рисунок 1 Область решения задачи

Математическое моделирование включает в свой состав двумерное нестационарное уравнение теплопроводности, с соответствующими начальными и предельными критериями [5]

$$\rho_s c_s \frac{\partial T_s(x,y,t)}{\partial t} = \lambda_s \left( \frac{\partial^2 T_s(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s(x,y,t)}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

$$0 < t \leq t_k; 0 < x < L_x; 0 < y < L_y$$

с первоначальным критерием:

$$T_s(x,y) = T_0 = const \quad (2)$$

и предельными критериями:

– критерий теплообмена газового потока с поверхностью конструкционного материала:

$$0 \leq x \leq l_g, \quad y = L_y : \lambda_s \frac{\partial T_s(x,y,t)}{\partial y} = \alpha_g (T_g - T_s(x,y,t)) \quad (3)$$

– критерий симметрии на вертикальной оси ординат:

$$x = 0, \quad 0 < y < L_y : \lambda_s \frac{\partial T_s(x,y,t)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

– критерий теплообмена с воздухом на боковой плоскости:

$$x = L_x, \quad 0 < y < L_y : \lambda_s \frac{\partial T_s(x,y,t)}{\partial x} = \alpha_e (T_e - T_s(x,y,t)) \quad (5)$$

– критерий теплообмена с воздухом на противоположной стороне пластины:

$$0 \leq x \leq L_x, \quad y = 0 : -\lambda_s \frac{\partial T_s(x,y,t)}{\partial y} = \alpha_e (T_e - T_s(x,y,t)) \quad (6)$$

– критерий теплообмена с воздухом на нагреваемой плоскости [6]:

$$l_g < x \leq L_x, \quad y = L_y : \lambda_s \frac{\partial T_s(x,y,t)}{\partial y} = \alpha_e (T_e - T_s(x,y,t)) \quad (7)$$

где  $\rho$  – плотность;  $T$  – температура;  $t$  – время;  $\alpha$  – коэффициент теплообмена;  $c$  – коэффициент удельной теплоемкости;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности.

При числовом решении задачи (1) – (7) обратимся к методу Рекфорда – Писмена [4]. Для аппроксимации дифференциального уравнения (1) разностным методом детерминируем пространственно-временную сетку [2] с координатами  $x_i = i \cdot h_x$ ;  $y_j = j \cdot h_y$ ,  $t_k = k \cdot \tau$ , где  $\tau$  –

шаг по времени;  $h_x, h_y$  – шаги на плоскости;  $i = \overline{0, N_x}$ ,  $j = \overline{0, N_y}$  и  $k = \overline{0, K}$ . В конечном итоге, вся проектируемая область покрывается сеткой (рис.2).

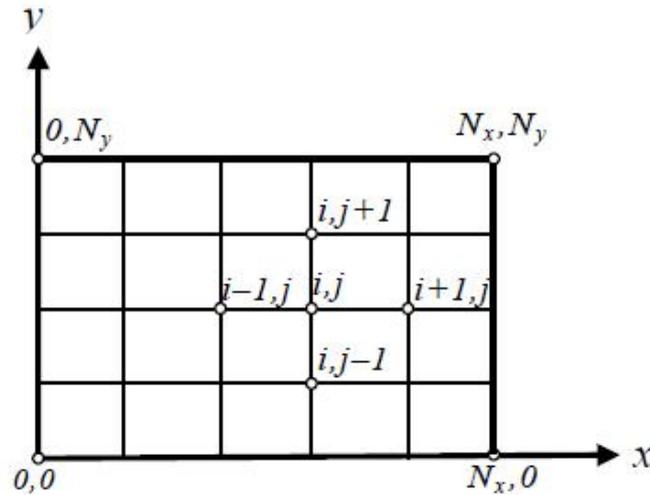


Рисунок 2 Разностная сетка области решения

Дискретизацию уравнения (1) реализуем при помощи локально-одномерной схемы А.А. Самарского, которая характеризуется свойством суммарной аппроксимации и является полностью устойчивой. Введем обозначения:  $T(x_i, y_i, t_k) = T_{i,j}^k$ . Основная идея метода [9] сводится к тому, что шаг по времени изменяется в два этапа. На промежуточном временном шаге выполняется дискретизация двумерного уравнения (1) по направлению оси абсцисс и следовательно, получается одномерное уравнение. После этого снова производим дискретизацию уравнения (1), но уже в направлении оси ординат. При решении полученных одномерных уравнений, установим поле температуры на шаге по времени [6].

При использовании неявной схемы на каждом полушаге по времени, отобразим уравнение (1) в виде:

$$c\rho \frac{T_{i,j}^{k+1/2} - T_{i,j}^k}{\tau/2} = \lambda \left( \frac{T_{i+1,j}^{k+1/2} - 2T_{i,j}^{k+1/2} + T_{i-1,j}^{k+1/2}}{h_x^2} \right) \quad (8)$$

$$c\rho \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^{k+1/2}}{\tau/2} = \lambda \left( \frac{T_{i+1,j}^{k+1} - 2T_{i,j}^{k+1} + T_{i-1,j}^{k+1}}{h_y^2} \right) \quad (9)$$

Аппроксимируя предельными критериями (2) - (7) получим:

$$i = 0, 0 < j < N_y : \lambda \frac{T_i^k - T_{i,j}^k}{h_x} = 0 \quad (10)$$

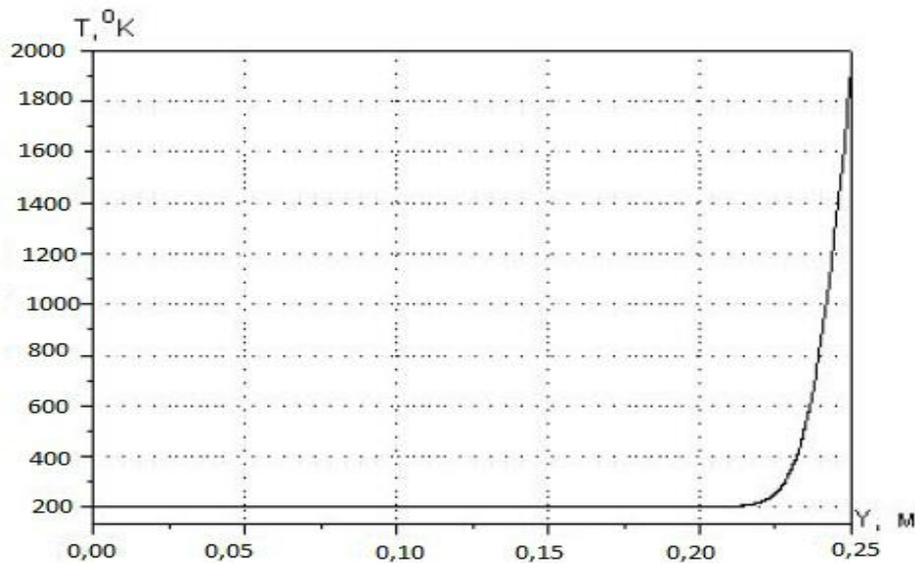
$$0 \leq i \leq N_{xl_g}, j = N_y : \lambda \frac{T_{i,j}^p - T_{i,j-1}^p}{h_y} = \alpha_g (T_g - T_{i,j}^p) \quad (11)$$

$$N_{xl_g} < i \leq N_x, j = N_y : \lambda \frac{T_{i,j}^k - T_{i,j-1}^k}{h_y} = \alpha_e (T_e - T_{i,j}^k) \quad (12)$$

$$i = N_x, 0 < j < N_y : \lambda \frac{T_{i,j}^k - T_{i,j-1}^k}{h_x} = \alpha_e (T_e - T_{i,j}^k) \quad (13)$$

Разностные уравнения (8), (9) сводятся к стандартному трёх диагональному виду и решаются методом прогонки [8].

Приведем результаты вычислений при:  $L_x = 0,35$  м,  $L_y = 0,25$  м,  $l_g = 0,17$  м,  $\rho_s = 1450$  кг/м<sup>3</sup>;  $C_p = 770$  Дж/(кг·°К);  $\lambda_s = 1,3$  Вт/(м·°К);  $T_0 = 200$  °К;  $T_g = 1800$  °К;  $T_e = 200$  °К,  $\alpha_g = 3500$  Вт/(м<sup>2</sup>·°С),  $\alpha_e = 50$  Вт/(м<sup>2</sup>·°С). Результаты процесса нагрева пластины через 120 секунд приведены на рисунке 3.



**Рисунок 3 Процесс нагрева пластины**

В данной статье уравнение (8) решается с помощью метода прогонки. Метод прогонки – легкий и продуктивный алгоритм, который решает системы линейных

алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами. Приведем данное уравнение к виду [5]:

$$a_i T_{i,j}^{k+1/2} = b_i T_{i+1,j}^{k+1/2} + c_i T_{i-1,j}^{k+1/2} + d_i \quad (14)$$

Преобразуем уравнение (8):

$$c\rho \frac{T_{i,j}^{k+1/2}}{\tau/2} + \lambda \frac{2T_{i,j}^{k+1/2}}{h_x^2} = \lambda \frac{T_{i+1,j}^{k+1/2}}{h_x^2} + \lambda \frac{T_{i-1,j}^{k+1/2}}{h_x^2} + c\rho \frac{T_{i,j}^k}{\tau/2},$$

после

$$\left(\frac{c\rho}{\tau/2} + \frac{2\lambda}{h_x^2}\right) T_{i,j}^{k+1/2} = \left(\frac{\lambda}{h_x^2}\right) T_{i+1,j}^{k+1/2} + \left(\frac{\lambda}{h_x^2}\right) T_{i-1,j}^{k+1/2} + \frac{c\rho}{\tau/2} T_{i,j}^k.$$

Отсюда получаем, что

$$a_i = 2\left(\frac{c\rho}{\tau} + \frac{\lambda}{h_x^2}\right), \quad b_i = c_i = \left(\frac{\lambda}{h_x^2}\right), \quad d_i = \frac{2c\rho}{\tau} T_{i,j}^k. \quad (15)$$

При границах (AB) и (CD) (см. рис. 2) для точек 0 и  $N_x$  выражение (14) будет записано в виде:

$$a_0 T_{0,j}^{k+1/2} = b_0 T_{1,j}^{k+1/2} + d_0, \quad (16)$$

$$a_N T_{N,j}^{k+1/2} = c_N T_{N-1,j}^{k+1/2} + d_N. \quad (17)$$

Выражения (16) и (17) будут рассматриваться в виде (14), при  $c_0 = 0$  для (16) и  $b_N = 0$  для (17), так как граничные точки имеют только по одной соседней точке.

Следует записать коэффициенты  $a_0, b_0, d_0, a_N, c_N, d_N$ , которые входят в (16) и (17), для осуществления граничных условий (10) и (13) на соответствующих границах:

$$a_0 = 1, b_0 = 1, d_0 = 0, a_N = 1 + \frac{\alpha_e h_x}{\lambda}, c_N = 1, d_N = \frac{\alpha_e h_x}{\lambda} T_e. \quad (18)$$

В записи уравнения (16) в виде возникает алгоритм прогонки:

$$T_{0,j}^{k+1/2} = P_0 T_{1,j}^{k+1/2} + Q_0, \quad (19)$$

в котором,

$$P_0 = \frac{b_0}{a_0}, Q_0 = \frac{d_0}{a_0}. \quad (20)$$

Соответствие (19) ставится в (14) для  $i=0$ . В конечном итоге получается, что из  $T_{1,j}^{k+1/2}$  можно выразить  $T_{0,j}^{k+1/2}$ . Продолжая процесс последовательной подстановки, из  $T_{i+1,j}^{k+1/2}$  можно выразить  $T_{i,j}^{k+1/2}$ :

$$T_{i,j}^{k+1/2} = P_i T_{i+1,j}^{k+1/2} + Q_i. \quad (21)$$

В этом случае,  $P_i$  и  $Q_i$  – новые коэффициенты, которые появились в результате подстановки.

Для того, чтобы выразить  $P_i$  и  $Q_i$  необходимо вернуться на стадии процесса подстановок, когда выражали  $T_{i-1,j}^{k+1/2}$  в виде:

$$T_{i-1,j}^{k+1/2} = P_{i-1}T_{i,j}^{k+1/2} + Q_{i-1}. \quad (22)$$

При подстановке (22) в (14) получаем выражение:

$$a_i T_{i,j}^{k+1/2} = b_i T_{i+1,j}^{k+1/2} + c_i (P_{i-1} T_{i,j}^{k+1/2} + Q_i) T_{i-1,j}^{k+1/2} + d_i, \quad (23)$$

которое можно переписать в виде (21). Следовательно, получим  $P_i$  и  $Q_i$  соответственно:

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}}; \quad (24)$$

$$Q_i = \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}}. \quad (25)$$

Таким образом, можно увидеть, что знаменатели в выражениях (24) и (25) одинаковые.

Выражения (24) и (25) рекурсивные, таким образом,  $P_i$  и  $Q_i$  зависят от значений  $P_{i-1}$  и  $Q_{i-1}$ . Данный рекурсивный процесс нуждается в отправной точке, которую обеспечивает выражением (20), которое не рекурсивно[3].

При переходе к вычислению  $P_N$  и  $Q_N$  можно заметить, что, как и  $b_N = 0, P_N = 0$ . Таким образом, согласно (15)  $T_N = Q_N$ . Для того чтобы получить  $T_{N-1}, T_{N-2}, T_{N-3}, \dots, T_2, T_1, T_0$  необходимо начать процесс обратной прогонки с использованием формулы (22)[3].

Запишем алгоритм для метода прогонки.

Алгоритм метода прогонки:

1. Из выражения (20) вычислим  $P_0$  и  $Q_0$ .
2. При использовании рекурсивных формул (24) и (25) получим  $P_i$  и  $Q_i$  для  $i = \overline{1, N}$ .
3. Будем считать, что  $T_N = Q_N$ .
4. Для того, чтобы найти  $T_{N-1}, T_{N-2}, T_{N-3}, \dots, T_2, T_1, T_0$  подставим найденные величины в формулу (22) для  $i = N - 1, N - 2, \dots, 0$ .

Алгоритм для решения уравнения (9) будет схожим. Граничные условия на границах (BC), (CD) и (AE) будут другими. Таким образом, коэффициенты  $a_0, b_0, d_0, a_N, c_N, d_N$ , которые входят в выражения (16) и (17) можно записать в следующем виде:

$$0 \leq i \leq N_x, j = 0: a_0 = 1 + \frac{\alpha_e h_y}{\lambda}; b_0 = 1; d_0 = \frac{\alpha_e h_y}{\lambda} T_e,$$

$$0 \leq i \leq N_{xl_g}, j = N_y: a_N = 1 + \frac{\alpha_g h_y}{\lambda}; c_N = 1; d_N = \frac{\alpha_g h_y}{\lambda} T_g; \quad (26)$$

$$N_{xl_g} < i \leq N_x, j = N_y: a_N = 1 + \frac{\alpha_e h_y}{\lambda}; c_N = 1, d_N = \frac{\alpha_e h_y}{\lambda} T_e.$$

Коэффициенты  $a_i, b_i, c_i, d_i$  выражения (9), которые входят в уравнение (14) примут вид:

$$a_i = 2 \left( \frac{c\rho}{\tau} + \frac{\lambda}{h_y^2} \right), b_i = c_i = \left( \frac{\lambda}{h_y^2} \right), d_i = \frac{2c\rho}{\tau} T_{i,j}^{k+1/2}. \quad (27)$$

Прогонка будет выполняться по индексу  $j$ , неизвестными будут  $T_{i,j}^{k+1}, T_{i,j+1}^{k+1}$  и  $T_{i,j-1}^{k+1}$ .

Полученные результаты могут быть использованы при решении задач рассмотренных в работе[10].

### Список литературы:

1. Дубровский В.В., Торшина О.А. Дискретность спектра задачи Неймана // Вестник Магнитогорского государственного университета. 2004. № 5. С. 130-131.
2. Кадченко С.И., Торшина О.А., Рязанова Л.С. Вычисление собственных чисел спектральной задачи Ора – Зоммерфельда // Современные наукоемкие технологии. – 2018. № 8. С. 89-94.
3. Козин Р.Г. Алгоритмы численных методов линейной алгебры и их программная реализация. Москва. 2012. 124 с.
4. Михеев С. Е. Многомерная аппроксимация и интерполяция. С.-Петербург. 2012. 59 с.
5. Михеев С.Е. Численные методы. СПб.: СПбГУ. 2013. 93 с
6. Торшина О.А. К вопросу сложения четных сферических гармоник // Вестник Магнитогорского государственного университета. 2004. № 6. С. 73-77.
7. Торшина О.А. О следе дифференциального оператора с потенциалом на проективной плоскости // Вестник Челябинского государственного университета. 2003. Т. 3. № 3. С. 178-191.
8. Торшина О.А. Оценка разности спектральных функций дискретных операторов // Альманах современной науки и образования. № 12-1, 2009. С. 123-125
9. Торшина О.А. Регуляризованные следы дифференциальных операторов. Магнитогорск, 2015.
10. Torshina O.A. Differential operators on the projective plane // Journal of Computational and Engineering Mathematics. 2015. Т. 2. № 4. С. 84-92.