УДК 517.5

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ, ПОРОЖДЕННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ЛАПЛАСА

Жазыкпаев А.К., О.А.Торшина

Аннотация. При исследовании стационарных процессов различной физической природы часто приходят к уравнениям эллиптического типа. Наиболее распространенным уравнением этого типа является уравнение Лапласа. Изучение уравнений эллиптического типа позволило создать мощный математический аппарат для решения других задач математической физики, в том числе для уравнения теплопроводности и уравнения колебаний. Не смотря на простоту записи, поиск частных решений уравнения Лапласа являются довольно затруднительным, в первую очередь из-за наличия особых точек. Очень часто в таких особых точках нарушаются критерии корректности задачи математической физики. В некоторых случаях удается обойти эти особенной точки при поиске приближенного решения численными методами. Поэтому, построение численных методов решения краевых задач, порожденных дифференциальным уравнением Лапласа, является актуальным направлением современной математики. Работа посвящена описанию численного метода решения смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа. Такие задачи имеют широкий круг приложений в различных областях физики и техники. Смешанные краевые условия являются общим случаем, представляющим комбинацию условий Неймана и Дирихле, поэтому рассмотренный алгоритм является универсальным для численного решения краевых задач, порожденных уравнениям Лапласа.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с частными производными, уравнения эллиптического типа, уравнения Лапласа, смешанные граничные условия, метод сеток.

NUMERICAL METHOD OF SOLUTION OF THE BOUNDARY MIXED PROBLEM, GENERATED BY THE DIFFERENTIAL LAPLACE EQUATION

Zhazykpaev A.K., O.A.Torshina

Aannotation. In the study of stationary processes of different physical nature often, come to the equations of elliptic type. The most common equation of this type is the Laplace equation. The study of equations of elliptic type allowed creating a powerful mathematical apparatus for solving other problems of mathematical physics, including the equation of thermal conductivity and the equation of oscillations. Despite the simplicity of writing, finding particular solutions to the Laplace equation is quite difficult, primarily due to the presence of singular points. Very often at such special points violated the criteria of correctness of the problem of mathematical physics. In some cases, it is possible to bypass these special points when searching for an approximate solution by numerical methods. Therefore, the construction of numerical methods for solving boundary value problems generated by the Laplace differential equation is an actual direction of modern mathematics. The work is devoted to the description of the numerical method for solving a mixed boundary value problem for the Laplace equation. Such problems have a wide range of applications in various fields of physics and technology. Mixed boundary conditions are a general case representing a combination of the Neumann and Dirichlet conditions; therefore, the considered algorithm is universal for the numerical solution of boundary value problems generated by the Laplace equations.

Keywords: partial differential equations, equations of elliptic type, Laplace equations, mixed boundary conditions, the grid method.

В настоящее время большое количество литературы посвящено решению первой и второй краевой задачи для уравнения Лапласа [8-10]. Такие задачи называют задачами Дирихле и Неймана, соответственно. В то же время, смешанным граничным условиям посвящено довольно небольшое количество исследований.

1. Постановка задачи

Пусть в плоскости Oxy задана прямоугольная область

$$\Omega = \{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}.$$

Требуется найти функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую внутри области Ω уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

а на границе $\partial\Omega$ условиям

$$u(0, y) + u'_y(0, y) = \varphi_0(y),\ u(a, y) + u'_y(a, y) = \varphi_a(y), \tag{2}$$

$$u(x,0) + u'_x(x,0) = \psi_0(x),\ u(x,b) + u'_x(x,b) = \psi_b(x), \tag{3}$$

где $\varphi_0(y), \varphi_a(y)$ и $\psi_0(x), \psi_b(x)$ – непрерывные функции по y и x, соответственно.

2. Метод конечных разностей

Для численного решения задачи (1)-(3) будем использовать метод конечных разностей или метод «сеток» [1].

Покроем область Ω сеткой (рисунок 1). Частные производные из уравнения (1) аппроксимируем центрированными разностными формулам [3]. Получим

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} = 0. \tag{4}$$

Здесь $i = \overline{1, N-1}$, $j = \overline{1, L-1}$, $h_x = a / N$, $h_y = b / L$, N – число узлов по x, L – число узлов по y.

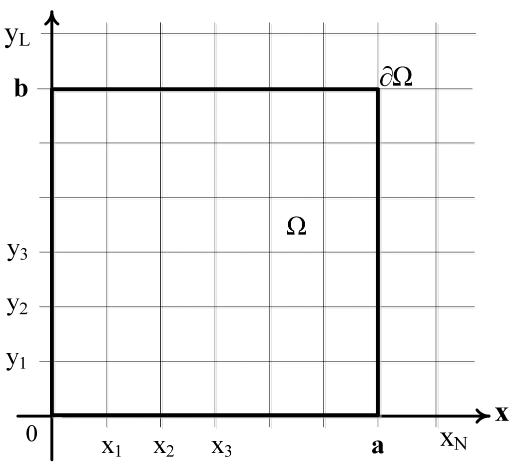

Рисунок 1 – Сетка для области $\Omega = \{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$

Для граничных условий (2) и (3) используем аппроксимацию [4] с разностью вперед, получим:

$$u_{0,j}+\frac{u_{0,j+1}-u_{0,j}}{h_y}=\varphi_0\left(y_j\right),\ \ j=\overline{0,L-1},$$

$$u_{N,j}+\frac{u_{N,j+1}-u_{N,j}}{h_y}=\varphi_a\left(y_j\right),\ j=\overline{0,L-1},$$

$$u_{i,0}+\frac{u_{i+1,0}-u_{i,0}}{h_x}=\psi_0\left(x_i\right),\ i=\overline{0,N-1}, \tag{5}$$

$$u_{i,L}+\frac{u_{i+1,L}-u_{i,L}}{h_x}=\psi_b\left(x_i\right),\ i=\overline{0,N-1}.$$

Равенства (4) и (5) образуют систему алгебраических уравнений, относительно переменных $u_{i,j}$ ($i=\overline{0,N}$, $j=\overline{0,L}$), которая может быть решена точным или приближенными методами [4].

3. Итерационный метод решения систем конечно-разностных уравнений

Решение системы уравнений (4)-(5) методом Гаусса удобно лишь при небольшом количестве узлов. В случае более мелкого разбиения данный метод оказывается вычислительно неэффективным, поэтому используют специальные итерационные методы.

Для систем конечно-разностных уравнений, аппроксимирующих уравнение Лапласа, в качестве такого метода может быть использован процесс усреднения Либмана [5].

Выразим из уравнения (4) $u_{i,j}$:

$$u_{i,j}=\frac{h_y^2\left(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}\right)+h_x^2\left(u_{i,j+1}+u_{i,j-1}\right)}{2\left(h_x^2+h_y^2\right)}. \tag{6}$$

Зададим во внутренних точках сетки начальное приближение $u_{i,j}^0$. Последующие приближения будем вычислять по формулам:

$$u_{i,j}^{k+1}=\frac{h_y^2\left(u_{i+1,j}^k+u_{i-1,j}^k\right)+h_x^2\left(u_{i,j+1}^k+u_{i,j-1}^k\right)}{2\left(h_x^2+h_y^2\right)},\ (k=0,1,2,3,...). \tag{7}$$

Для границы области достаточно задать начальное значение только в точке $[0,0]$. В остальных граничных точках значения сеточной функции $u_{i,j}^k$ вычисляются по формулам:

$$u_{0,j+1}^k=h_y\varphi_0\left(y_j\right)+u_{0,j}^k(1-h_y),\ \ j=\overline{0,L-1}, \tag{8}$$

$$u_{i+1,L}^k=h_x\psi_b\left(x_i\right)+u_{i,L}^k(1-h_x),\ \ i=\overline{0,N-1}, \tag{9}$$

$$u_{N,j+1}^{k}=h_{y}\varphi_{a}\left(y_{j}\right)+u_{N,j}^{k}(1-h_{y}),\ \ j=\overline{0,L-1}, \tag{10}$$

$$u_{i+1,0}^{k}=h_{x}\psi_{0}\left(x_{i}\right)+u_{i,0}^{k}(1-h_{x}),\ \ i=\overline{0,N-1}. \tag{11}$$

Доказано [6], что данный метод сходится, не зависимо от выбора начального приближения, т.е. существует предел

$$\lim_{k\to\infty}u_{i,j}^{k}=u_{i,j}.$$

Для ускорения процесса сходимости используют следующие приемы [7]:

1) чтобы получить начальное приближенное решение задачи, считают, что функция $u_{i,j}^{0}$ по горизонтали (вертикали) внутри области распределена равномерно;

2) при вычислении последующих приближений используют не только значения в узловых точках, полученных на предыдущем шаге, но и вновь найденные значения (метод Зейделя), т.е. используя формулу:

$$u_{i,j}^{k+1}=\frac{h_{y}^{2}\left(u_{i+1,j}^{k}+u_{i-1,j}^{k+1}\right)+h_{x}^{2}\left(u_{i,j+1}^{k}+u_{i,j-1}^{k+1}\right)}{2\left(h_{x}^{2}+h_{y}^{2}\right)}$$

Процесс последовательного приближения решения обычно продолжают до тех пор, пока во всех узлах сетки выполняется условие

$$\left|u_{i,j}^{k}-u_{i,j}^{k-1}\right|>\varepsilon,$$

где ε – заданная погрешность вычисления.

Т.е. до тех пор, пока в двух последовательных приближениях не совпадет требуемое количество десятичных знаков.

4. Численный эксперимент

Были проведены численные эксперименты для решения конкретной задачи:

$$\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}}=0,$$

$$u(0,y)+u_{y}'(0,y)=y^{2}+10,\ u(1,y)+u_{y}'(1,y)=2y-10,$$

$$u(x,0)+u_{x}'(x,0)=x^{2}-10,\ u(x,1)+u_{x}'(x,1)=2x+10.$$

Процесс вычисления состоял из нескольких этапов:

1) вычисление начального приближения на границе области Ω;

2) вычисление начального приближения внутри области Ω (чтобы получить начальное приближение внутри области Ω, будем считать, что функция $u=u(x,y)$ распределена равномерно по вертикалям);

3) составление системы алгебраических уравнений по формулам (7)-(11);

4) решение системы уравнений итерационным методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

В таблицах 1-3 приведены некоторые приближения задачи для пятиточечной сетки.

Таблица 1. Первое приближение для пятиточечной сетки

8,774	8,345	7,710	6,759	5,346
4,031	2,427	2,538	2,999	3,628
0,585	-0,928	-0,802	-0,177	1,171
-1,919	-3,576	-3,905	-3,717	-2,271
-3,689	-5,142	-6,106	-6,705	-7,028

Таблица 2. Шестое приближение для пятиточечной сетки

8,775	8,346	7,712	6,761	5,349
4,097	4,323	4,131	3,814	3,632
0,635	0,863	0,785	0,768	1,176
-1,882	-2,181	-2,547	-2,684	-2,265
-3,662	-5,121	-6,091	-6,69	-7,020

Таблица 3. Тринадцатое приближение для пятиточечной сетки

8,775	8,346	7,712	6,761	5,349
4,097	4,395	4,203	3,850	3,632
0,635	0,935	0,858	0,804	1,176
-1,882	-2,144	-2,511	-2,666	-2,265
-3,662	-5,121	-6,091	-6,693	-7,020

Таким образом, за 13 итераций удалось достичь заданной точности. Время выполнения программы менее 1с.

На рисунках 10–11 представлены начальное и конечное приближения для сетки размером 11x15.

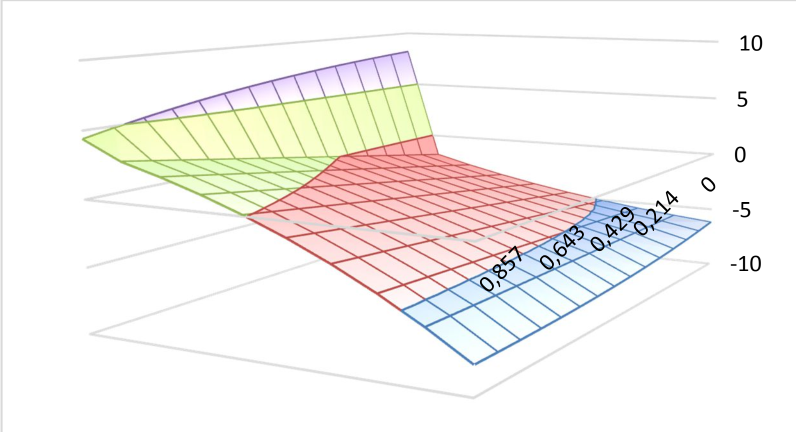

Рисунок 2 – Визуализация начального приближения

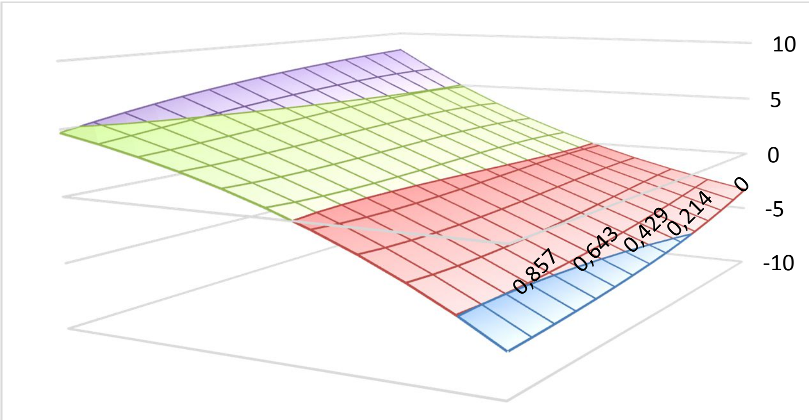

Рисунок 3 – Визуализация конечного приближения

Результатом исследований стала аппроксимация уравнения Лапласа и смешанных граничных условий в случае неравномерной сетки, построение и реализация алгоритма численного решения смешанной краевой задачи, порожденной дифференциальным уравнением Лапласа.

Проведенные численные эксперименты показали хорошую сходимость и высокую вычислительную эффективность алгоритма численного решения смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа.

Список литературы

1. Дубровский В.В., Торшина О.А. Дискретность спектра задачи Неймана // Вестник Магнитогорского государственного университета. 2004. № 5. С. 130-131.
2. Кадченко С.И., Торшина О.А., Рязанова Л.С. Вычисление собственных чисел спектральной задачи Ора – Зоммерфельда // Современные наукоемкие технологии. – 2018. № 8. С. 89-94.
3. Козин Р.Г. Алгоритмы численных методов линейной алгебры и их программная реализация. Москва. 2012. 124 с.
4. Михеев С. Е. Многомерная аппроксимация и интерполяция. С.-Петерб. 2012. 59 с.
5. Михеев С.Е. Численные методы. СПб.: СПбГУ. 2013. 93 с

6. Торшина О.А. К вопросу сложения четных сферических гармоник // Вестник Магнитогорского государственного университета. 2004. № 6. С. 73-77.
7. Торшина О.А. Оценка разности спектральных функций дискретных операторов // Альманах современной науки и образования. № 12-1, 2009. С. 123-125
8. Торшина О.А. Существенный спектр задачи Неймана для оператора Лапласа // Современные проблемы науки и образования: материалы L внутривузовской научной конференции преподавателей МаГУ. – Магнитогорск: Издательство Магнитогорский государственный университет, 2012. - С. 271.
9. Торшина О.А. Формула асимптотики собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами с потенциалом на проективной плоскости // В книге: Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы конференции. 2003. - С. 258-259.
10. Torshina O.A. Differential operators on the projective plane //Journal of Computational and Engineering Mathematics. 2015. Т. 2. № 4. С. 84-92.