

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕПЛООБМЕНА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАТОДЕ

Однорожникова С.И., Торшина О.А.

Важное место занимает неравновесная плазма с низкой температурой, которая относится к газовым разрядам при низком давлении, в микроэлектронных технологических устройствах. Они формируются когда газ имеет низкое давление и ток мал. Этот тлеющий разряд может гореть в режиме так называемым нормальным, при разрядном токе равным 1А, что приводит в свою очередь к стягиванию пятна, где радиус его будет составлять 1мм. В результате данного процесса потоком тепла нагревается поверхность этого катода и сам газ около него, который выделился из-за движения в катодном слое заряженных частиц разряда. Вследствие чего происходит контракция, то есть из-за повышения у газа температуры в катоде концентрация снижается, нормальная плотность разрядного тока уменьшается, радиус пятна увеличивается. Это предвещает к тому, что тлеющий разряд постепенно переходит в дуговой разряд, если проходящий ток намного больше имеющегося, то есть увеличивается. После того как зажгли разряд согласовано изменяется у катода температура, у пятна радиус, у разряда параметра. Процесс происходит при атмосферном давлении.

Ключевые слова: тлеющий разряд, поверхность катода, атмосферное давление, цилиндрический электрод, нагревание газа, краевая задача.

MATHEMATICAL MODELING OF THE HEAT EXCHANGE PROCESS IN A CYLINDRICAL CATHODE

Odnorozhnikova S.I., Torshina, O. A.

An important place is occupied by a non-equilibrium plasma with a low temperature, which refers to gas discharges at low pressure, in microelectronic technological devices. It is formed when the gas has a low pressure and the current is small. This glow discharge can burn in the so-called normal mode, with a discharge current equal to 1A, which in turn lead to contraction of the cathode spot, where its radius would be 1mm. As a result of this process, the surface of this cathode and the gas itself, which was released due to the movement of charged particles in the cathode layer, is heated by the flow of heat. As a result, contraction occurs, that is, due to an increase in the temperature of the gas in the cathode, the concentration of the discharge current decreases, the normal discharge current density decreases, the spot radius increases. This causes the glow discharge to gradually transition into an arc discharge, if a passing current with a lot more, is increases. After the discharge is lit, the temperature, the spot radius, and the discharge parameters are varied at the cathode. All this is done at atmospheric pressure.

Keywords: glow discharge, cathode surface, atmospheric pressure, cylindrical electrode, heating the gas, boundary value problem.

Самостоятельный электрический разряд при низком давлении газа, как правило, образовывается и при малом токе. Этот тлеющий разряд находит своё практическое применение в микроэлектронных технологических устройствах. Например, травление, виды источника света (лампы), напыление и т.д. [10]. Механизм преобразование света исходит от наличия у тлеющего разряда плазмы (положительного столбца). В этом состоянии газ хороший проводник электричества, и тем самым на протяжении всего времени сохраняется высокая ионизация. В нынешнее время экономия занимает не мало важное место для людей и тем самым диффузионная обработка в тлеющем разряде является популярной темой для изучения. Она позволяет сэкономить расход электроэнергии и в большой степени технологический газ. Также к преимуществам использования тлеющего разряда можно привести наличие высокого коэффициента применения электроэнергии, сокращение по времени продолжительности процесса благодаря нагреванию тела до необходимой температуры насыщения, тем самым увеличивается активность газовой среды и поверхности катода [7]. Когда

разрядный ток достигает порядка 1 А, то тлеющий разряд в газе атмосферного давления как правило сжимается в пятно, радиус которого равен приблизительно 1 миллиметра, что соответствует его нормальному режиму. В результате происходит рост температуры газа у катода, что привело к частичному уменьшению концентрации и у разрядного тока нормальной плотности, но к росту радиуса пятна. И это все происходит после непосредственного зажигания разряда. Во многих работах проведены исследования как экспериментального, так и теоретического характера при изучении изменений разряда и температуры в промежуточном катодном слое газа нормального тлеющего разряда атмосферного давления и поверхностного слоя в стабильном состоянии разряда.

В данной работе было рассчитано температурное изменение во времени в протяжённом цилиндрическом катоде при наличии пятна после зажигания самоподдерживающегося нормального электрического разряда с холодным электродом в газе атмосферного давления (на этапе установления). Решена система уравнений, которая связывает среднюю температуру поверхность пятна и слоя тлеющего разряда, и тем самым обнаружена зависимость данных величин от промежутка времени.

Построим математическую модель. Пусть дан электрод, который будет выполнять в газовом разряде функции катода, где R - радиус цилиндра; L - длина цилиндра; T_0 -начальная температура. После того как зажгли нормальный тлеющий разряд, где $t=0$ – начальный момент времени, сформировалось катодное пятно тлеющего разряда с радиусом $r_s(t)$ в середине 1-ого из торцов (рисунок 1).

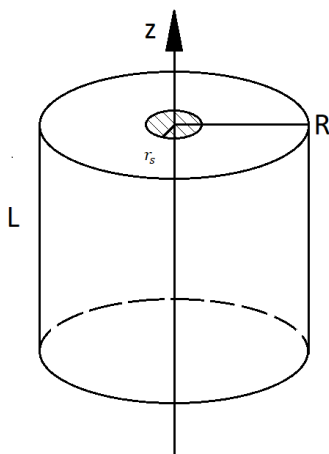


Рисунок 1. Геометрия электрода с пятном.

Предположим, что ось симметрии цилиндрической системы координат будет совпадать с осью электрода, а также направленной в разрядный объем от симметричной поверхности катода, находящемся рядом с пятном в плоскости $z = 0$. В результате движение электрических зарядов в катодном слое разряда в пятне, а точнее на поверхности электрода, падает однородный тепловой

поток, который нагревает его, где плотность составляет $q_s(t)$; температура нижнего электродного торца также равна T_0 ; плоскость, где расположен и где происходит отвод тепла $z = -L$. Тепловой поток его боковой поверхности пренебрежительно мал, из-за того, что теплопроводность газа значительно меньше материала электрода, и следовательно его можно опустить. Также наличие холодных электронов можно пренебречь, так как он не вызывает большого изменения на общей тепловой баланс, обусловленное тем, что имеется тепловое излучение с электродной поверхности. Следовательно, нестационарное уравнение теплопроводности будет описывать изменение с течением времени температуры электрона:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left[\frac{1}{r} * \frac{\partial}{\partial r} \left(r * \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (1)$$

Также имеются ограничения на торцах

$$\frac{\partial T}{\partial z}(r, 0, t) = \begin{cases} \frac{q_s(t)}{\lambda}, & r \leq r_s(t) \\ 0, & r_s(t) < r \leq R \end{cases} \quad (2)$$

$$T(r, -L, t) = T_0, \quad (3)$$

Поверхность боковая:

$$\frac{\partial T}{\partial r}(R, z, t) = 0, \quad (4)$$

начальные условия:

$$T(r, z, 0) = T_0, \quad (5)$$

Элементы, которые будут не зависеть от изменения температуры:

$a = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho c}}$, λ – коэффициент теплопроводности, ρ – плотность электрода, c – удельная теплоёмкость материала электрода.

Данная краевая задача может быть решена при помощи конечных интегральных преобразований Ханкеля и Фурье [1] и будет выглядеть следующим образом:

$$T(r, z, t) = T_0 + \frac{2a}{\lambda LR^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \int_0^t q_s(\tau) r_s^2(\tau) e^{-a v_m^2 (t-\tau)} d\tau + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2J_0(s_i r)}{s_i J_0^2(s_i R)} \int_0^t q_s(\tau) r_s(\tau) J_1(s_i r_s(\tau)) e^{-a(s_i^2 + v_m^2)(t-\tau)} d\tau \right\} \cos(v_m z). \quad (6)$$

где $J_0(x)$ и $J_1(x)$ – это функции 1-ого рода нулевого и 1-ого порядка Бесселя, $v_m = \frac{\pi(2m+1)}{2L}$, s_i – является корнем уравнением $J_1(s_i R) = 0$.

Из (6) уравнения можем найти в пятне значение средней температуры:

$$T_s(t) = \frac{2}{r_s^2(t)} \int_0^{r_s(t)} T(r, 0, t) r dr = T_0 + \frac{2a}{\lambda LR^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \int_0^t q_s(\tau) r_s^2(\tau) e^{-a v_m^2 (t-\tau)} d\tau + \right.$$

$$+ \frac{4}{r_s(t)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(s_i r_s(t))}{s_i^2 J_0^2(s_i R)} \int_0^t q_s(\tau) r_s(\tau) J_1(s_i r_s(\tau)) e^{-a(s_i^2 + v_m^2)(t-\tau)} d\tau \} . \quad (7)$$

Из-за того, что радиус пятна r_s — намного больше ширины катодного слоя разряда d_c , то в нём температура данного газа будет $= T_s$. Большая часть тепловой мощности, которая выделяется в катодном тёмном пространстве разряда, через пятно переходит в катод, при плотности теплового потока:

$$q_s = j U_c, \quad (8)$$

Нормальная плотность тока это j , U_c — это падения напряжения разряда.

Так как $q_s = const$ по его сечению, то

$$r_s = \left(\frac{I}{\pi j} \right)^{0,5}, \quad (9)$$

где I это разрядный ток.

Уравнения слоя тлеющего разряда определяют значения [8]:

$$d_c = \frac{2}{pA} e^{\frac{1}{g}} \ln\left(1 + \frac{1}{\gamma_i}\right) \quad (10)$$

$$U_c = \frac{Bgp d_c}{2}, \quad (11)$$

а у разрядного тока плотность будет составлять:

$$j = K_0 T_s^{\frac{1}{2}} U_c^{\frac{3}{2}} d_c^{\frac{-5}{2}}, \quad (12)$$

при $g = 1.639$, A и B — являются $const$ для газа, представленного в данной работе, и которые входят в формулу зависимости коэффициента ионизации газа электронами от напряжённости электрического поля [6], γ_i — у материала катода является коэффициентом ионно-электронной эмиссии.

$$K_0 = 4\varepsilon_0(1 + \gamma_i) \left(\frac{ek}{\sigma p_0 M} \right)^{\frac{1}{2}},$$

ε_0 — диэлектрическая постоянная, σ — в газе является резонансной перезарядкой иона, e — иона заряд, M — иона масса, k — постоянная Больцмана.

Вследствие применения давления газа «р» будет происходить уменьшение концентрации газа впоследствии повышения его температуры (нагревания):

$$p = p_0 \frac{T_0}{T_s}, \quad (13)$$

где p_0 это давление при соответствующей ему температуры T_0 в газе.

Уравнения с (7) по (13) составляют систему, причём замкнутую, которая описывает изменение в пятне средней температуры на поверхности катода, а также параметры разряда в катодном слое после того, как произошло зажигание разряда, с течением времени. Если исключить из этой системы такие величины, как q_s, r_s, p, d_c, U_c, j , то получится уравнение вида:

$$T_s(t) = T_0 + \frac{2\beta}{LR^2} \left[\delta^2 \xi(t) + \frac{4a}{T_s(t)} \psi(t) \right], \quad (14)$$

$$\text{При } \xi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[1 - e^{-a v_m^2 t}]}{v_m^2},$$

$$\psi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(s_i \delta T_s(t))}{s_i^2 J_0^2(s_i R)} \int_0^t \frac{J_1(s_i \delta T_s(\tau))}{T_s(\tau)} e^{-a(s_i^2 + v_m^2)(t-\tau)} d\tau$$

$$\delta = \left[\frac{2 l e^{\frac{1}{\theta}} \ln(1 + \frac{1}{\gamma_i})}{\pi A K_0 (\frac{B g}{2})^{\frac{3}{2}} (p_0 T_0)^{\frac{5}{2}}} \right]^{0.5}$$

$$\beta = \frac{K_0}{\lambda} \left(\frac{1}{2} B g p_0 T_0 \right)^{\frac{5}{2}}$$

Данное решение можно получить численно. При переходе к пределу, где $t \rightarrow \infty$, мы получим уравнение T_{se} . При чём следует отметить, что данная температура будет стремиться принять своё стационарное значения, т.е. $T_{se} = T_s(\infty)$, где интеграл будет вычисляться по τ , а ряд суммироваться по m , вследствие получим :

$$T_{se} = T_0 + \frac{\beta}{T_{se}^2} X(T_{se}), \quad (15)$$

$$X(T_{se}) = \left(\frac{\delta T_{se}}{R} \right)^2 L + \frac{4}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1^2(s_i \delta T_{se}) th(s_i R)}{s_i^3 J_0^2(s_i R)} \quad (16)$$

Если считать, что радиус пятна будет намного меньше самих размеров электрода, т.е. $R \rightarrow \infty$, $L \rightarrow \infty$, то сумма в уравнение (16) преобразуется в интеграл [9], после вычисления которого из (23) получим выражение для получения в пятне ср. температуры на электроде, который в свою очередь занимает полупространство « $z \leq 0$ ». Это все и доказывает, что выражения (14) и (15) верны.

Вычисления находились на основе данных гелия атмосферного давления для разряда, который использует цилиндрический стальной электрод в качестве катода (нормальное атмосферное давление 10^5 Па, абсолютная температура 300К, сечение в гелии $\sigma = 2 * 10^{-19} \text{ м}^2$, постоянные газа А и В соответственно 2.31 1/(мПа) , 61.0 1/(мПа) , $\lambda = 45 \text{ Вм/(м К)}$ [10,4,11]). Исходя из выражения (15), была найдена T_{se} в пятне для 2-х значений его радиуса, разрядный ток которого 1А, и установлена зависимость длины некоторого электрода $L_{от}$ температуры на его поверхности (рисунок 2).

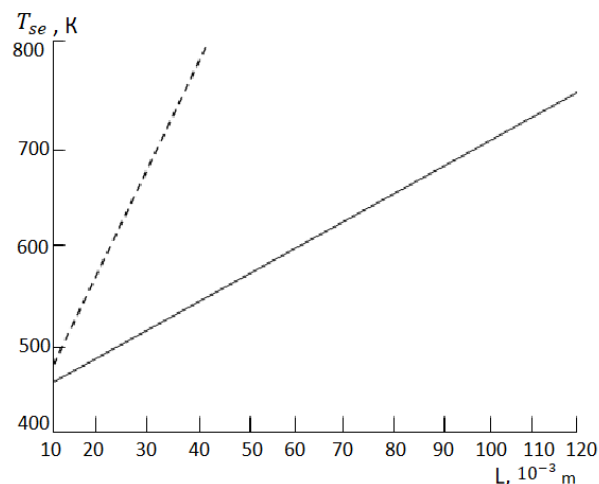


Рисунок 2. Установившаяся зависимость средней температуры от длины электрода.

Зависимость температуры от времени представлена на рисунке 3, которая была получена при решении выражения (14) численным методом [2]. Анализируя рисунок 2 и 3, можно сделать вывод, что функция $T_s(t)$ принимает своё стационарное значения 460К, которое было достигнуто после нагревания его до 450К в течении 10 секунд.

В [4] работе было установлено в ходе эксперимента зависимость температуры от времени на поверхности электрода, радиус которого = 0,018 метров и длинны = 0,01 метра, при нагревании разряда в пятне. Можно заметить, что своего стационарного состояния она достигает к 750 К, пройдя промежуток времени равный 200 секунд. Однако, просматривая рисунок 2, видно, что для данного электрода такого же радиуса и такой же температуры он достигает при $L = 0.12$ м. Это происходит из-за того, что в экспериментальной работе отвод тепла значительно затрудняется от электрода из-за того, что он осуществляется через его детали крепления, так как он нагревания до красноты при разрядном токе = 2А. В следствии чего не было выполнено граничное условие из-за нагревания у электрода нижнего торца. Это условие (3). Делаем вывод о том, что выражения (14)-(15) будем использовать при разрядном токе, который намного ниже представленного в данной работе, то есть до 0,3. Если же наоборот (для охлаждённого), то уравнение (3) будет верно тогда, когда разрядный ток будет намного выше, то есть при длине электрона = 0,0025 метров и разрядного тока = 1А средняя температура катода в представленной работе, которая рассчитана из (15) формулы и равна 410 К, будет совпадать в пятне 430 К.

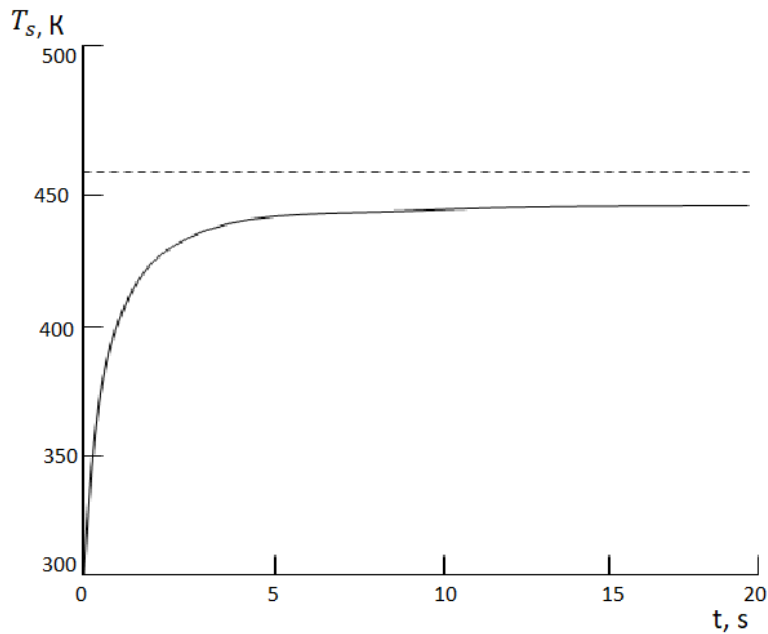


Рисунок 3. Зависимость средней температуры от времени горения разряда.

В работе было рассчитано температурное изменение во времени в протяжённом цилиндрическом электроде при наличии катодного пятна самоподдерживающегося электрического разряда с холодным электродом в газе на его торцах после того, как зажгли нормальный тлеющий разряд при атмосферном давлении. Учитывая, как влияет нагретый газ на поверхности пятна на его размер, найдено для нестационарного уравнения аналитическое решение, а также выведено выражение для нахождения значения средней температуры на поверхности в пятне электрода. Было найдено уравнение для постоянной во времени средней температуры T_{se} поверхности в пятне электрода, впоследствии длительного горения разряда во времени.

При сравнении полученных результатов расчётов и экспериментальных данных [5] в работ было найдено, что если использовать стальной катод, при наличии охлажденного нижнего торца выражения для находений T_{se} , то справедливо при разрядного тока ≤ 1 А. Если же в случае когда нижней торец не охлаждён, то T_{se} будет меньше, чем в предложенном эксперименте, при $I > 0.3$. Это происходит из-за того, что используется при его выводе предположение о том, что была фиксирована температура у электрода на нижнем торце, который не выполняется в таких условиях.

Литература

1. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Москва, 2015. 620 с.
2. Долгополов Д.В. Методы нахождения собственных значений и собственных векторов матриц. Санкт-Петербург. 2015. 220 с.
3. Дубровский В.В., Торшина О.А. Дискретность спектра задачи Неймана // Вестник Магнитогорского государственного университета. 2004. № 5. С. 130-131.

4. Козин Р.Г. Алгоритмы численных методов линейной алгебры и их программная реализация. Москва. 2012. 124 с.
5. Копачевский Н.Д. Спектральная теория операторных пучков: Специальный курс лекций. Симферополь: ООО ФОРМА. 2009. 128 с.
6. Круликовский Н.Н. Пути развития спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов. Томск. 2008. 222 с.
7. Михеев С. Е. Многомерная аппроксимация и интерполяция. С.-Петербург. 2012. 59 с.
8. Михеев С.Е. Численные методы. СПб.: СПбГУ. 2013. 93 с
9. Торшина О.А. К вопросу сложения четных сферических гармоник // Вестник Магнитогорского государственного университета. 2004. № 6. С. 73-77.
10. Торшина О.А. Оценка разности спектральных функций дискретных операторов // Альманах современной науки и образования. № 12-1, 2009. С. 123-125