УДК. 517.928

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ

Алымкулов Келдибай,
Директор Института фундаментальных и прикладных исследований при Ошском государственном университете, д.ф.-м. наук, профессор.

Белеков Кенжебек Жолдошевич,
Кыргызско-Русский-Славянский университет, старший преподаватель, к.ф.-м.наук.

Аннотация

Исторически задача Абеля (1823 г.) представляет первую задачу, которая привела к необходимости рассмотрения интегральных уравнений. Задача Абеля состоит в следующем. Материальная точка под действием силы тяжести движется в вертикальной плоскости по некоторой кривой. Требуется определить эту кривую так, чтобы материальная точка, начав свое движение без начальной скорости в точке кривой достигла некоторой оси за определенное время . Интегральное уравнение Абеля в общем случае не имеет классического решения, так как это решение в начале координат не является гладкой функцией и имеет особенность степени меньшего единицы. Поэтому встает вопрос как получить непрерывно дифференцируемое решение этого уравнения. Чтобы получить гладкое решение этого уравнения мы регуляризуем этого уравнения при помощи сингулярно возмущенного интегро-дифференциального уравнения первой степени, причем это уравнение является также уравнением второго рода. Решение последнего уравнения решается методами погранфункций и фиктивного параметра. В результате чего решение исходного уравнения Абеля приближается непрерывно дифференцируемой функцией, которая не имеет в начале координат особенность по независимой переменной.

Ключевые слова: Уравнение Абеля, интегральное уравнение первого рода, классическое решение, обобщенное решение, асимптотика решения, интегро-дифференциальное уравнение, сингулярно возмущенное уравнение, регуляризованное уравнение, метод погранфункций, метод фиктивного параметра.

REGULARIZATION OF THE GENERALIZED SOLUTION OF ABEL'S EQUATION

Historically, the problem of Abel (1823) is the first task, which led to the need to consider integral equations. Abel's task is as follows. The material point under the action of gravity moves in a vertical plane along a certain curve. It is required to define this curve so that the material point, having started its movement without the initial velocity at the point of the curve, reaches a certain axis in a certain time. In general, the Abel integral equation does not have a classical solution, since this solution at the origin is not a smooth function and has a singularity of degree less than one. Therefore, the question arises how to obtain a continuously differentiable solution of this equation. To obtain a smooth solution of this equation, we regularize this equation using a singularly perturbed first-degree integro-differential equation, and this equation is also a second-kind equation. The solution of the last equation is solved by the methods of the boundary functions and the fictitious parameter. As a result, the solution of the original Abel equation is approached by a continuously differentiable function that does not have a singularity at the origin of coordinates according to an independent variable.

Keywords: Abel equation, integral equation of the first kind, classical solution, generalized solution, solution asymptotics, integro-differential equation, singularly perturbed equation, regularized equation, boundary function method, fictitious parameter method.

1. Введение

Известно, что уравнением Абеля называется уравнения

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt = f(x),$$

где $f(x)$ достаточно гладкая функция на отрезке [0,1], x – независимая переменная, которая изменяется на отрезке [0,1], $\varphi(t)$ –неизвестная функция.

Ядро этого уравнения $K(x,t)=\frac{1}{\sqrt{x-t}}$ имеет в точке x=t слабую особенность. Позднее и более общее уравнение

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha} = f(x) \qquad \textbf{(1)}$$

где $0<\alpha<1,\ 0\le x\le 1$ также стали называть уравнением Абеля.

Определения 1. Решение уравнения (1) из класса $C[0,1]$ будем назвать, классическим решением.

Справедлива

Теорема 1. Пусть $f(x)\in C^{(1)}[0,1]$, чтобы уравнения (1) имело классическое решение из $\varphi(x)\in C^{(0)}[0,1]$необходимо и достаточно выполнение условия

$$f(0)=0 \qquad (2)$$

Это теорема вытекает, из того что решение уравнения (1) представляется в виде

$$\varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\right] \coloneqq F(x) := \varphi_0(x)+\varphi_1(x) \qquad (3)$$

где

$$\varphi_0(x)=\omega\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}},\ \ \varphi_1(x)=\omega\int_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt,\ \omega=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\ .$$

Очевидно, что функция $\varphi_1(x)$ равномерно ограничена, то есть $\left|\varphi_1(x)\right|\le m$, некоторой постоянной m . Здесь и далее все постоянные не зависящие от параметра ε будем обозначать через m.

Из (3) вытекает, что если $f(0)\neq 0$, то это решение не принадлежит пространству $C[0,1]$.

Из (3) также вытекает, что задача определения решения уравнения Абеля относится к некорректно поставленным задачам, так как малое изменения правой части уравнения может привести к большим изменениям решения.

Действительно, уравнение

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^\alpha}=x$$

имеет решение $\varphi(x)=\omega\frac{x^{2-\alpha}}{2-\alpha}$. Однако, малое возмущение правой части этого уравнения

$$\int_0^x \frac{\theta(t)dt}{(x-t)^\alpha}=x+\delta$$

где δ - малое положительное число, приводит большому изменению решения, так как решение этого уравнение выражается формулой

$$\theta(x)=\omega\frac{x^{2-\alpha}}{2-\alpha}+\omega\frac{\delta}{x^{1-\alpha}}$$

Очевидно, что функция $\theta(x)$ не ограничена в точке $x=0$, то есть малое возмущение правой части уравнения привело к большому изменению решения уравнения.

Предположим, что $f(0) \neq 0$ в этом случае решение (3) не является классическим решением. Ставится вопрос, каким образом можно «регуляризовать» уравнение (1) и получить классическое решение близкое к решению (3) или иначе, какие «сингулярно возмущенные» уравнение полученные из (1) можно изучать?

Например, можно изучать сингулярно возмущенное уравнение

$$\int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha}[\varphi(t)+\varepsilon A(t,\varphi(t))]dt = 0$$

где $A(t,\varphi(t) -$ некоторый линейный или нелинейный дифференциальный (обыкновенный или частных производных) оператор.

Известно, что при изучении уравнений типа Фредгольма, первого рода, чтобы получить приближенное решение этого уравнения сводят их к уравнению Фредгольма второго рода [3].

Здесь за регуляризованного уравнения Абеля первого рода берется опять же сингулярно возмущенное интегро- дифференциальное уравнение первого рода.

Отметим, что содержание этой статьи докладывался на конференции посвященной восьмидесятилетнему юбилею академика академии наук Украины А.М. Самойленко [1].

2. Сингулярно возмущенное линейное интегро-дифференциальное уравнение Абеля первого порядка

Рассмотрим уравнение (1) и его линейное регуляризованное уравнение

$$\int_0^x (x-t)^{-\alpha}\left[y(t)+\varepsilon \frac{dy(t)}{dt}\right]dt = f(x) \qquad \textbf{(4)}$$

где $f(0) \neq 0$, $y(t) -$неизвестная функция. Для уравнения (4) поставим начальное условие

$$y(0) = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

Задача (5) и (6) эквивалентна к следующей задаче.

$$\varepsilon\frac{dy(x)}{dx}(x) = -y(x) + F(x), \qquad y(0) = 0, \qquad \textbf{(6)}$$

Решение невозмущенной задачи (6): $y_0(x) = \varphi_0(x)$ не удовлетворяет условию $y(0) = 0$, так как $y_0(0) = \varphi_0(0) = \infty$. Нам нужна следующая

Теорема 1. Задача (6) имеет классическое решение

$$\Phi(x,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x e^{-\frac{(x-s)}{\varepsilon}}F(s)ds$$

и для него имеет место оценка

$$|\Phi(x,\varepsilon)| \leq m\varepsilon^{\beta-1}.$$

где *число* $0 < \gamma = 2(1-\beta), 0 < \beta < \alpha$.

Доказательство. Имеем

$$\Phi(\mathrm{x}, \varepsilon) = I(x,\varepsilon) + J(x,\varepsilon),$$

где

$$I(x,\varepsilon) = \omega \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\mathrm{x}} \mathrm{e}^{-\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{s})}{\varepsilon}} s^{\alpha-1}\mathrm{ds}, \quad J(x,\varepsilon) = \omega \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\mathrm{x}} \mathrm{e}^{-\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{s})}{\varepsilon}} \varphi_1(\mathrm{s})\mathrm{ds}$$

Очевидно, функция $J(x,\varepsilon)$ ограничена некоторой постоянной. Чтобы получить оценку для функции $I(x,\varepsilon)$ после подстановки x-s=t запишем его в виде

$$I(x,\varepsilon) = \omega \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\mathrm{x}} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\varepsilon}} (x-t)^{\alpha-1}\mathrm{ds}$$

разделим этот интеграл на два слагаемых

$$I(x,\varepsilon) = I_1(x,\varepsilon) + I_2(x,\varepsilon)$$

где

$$I_1(x,\varepsilon) = \omega \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\delta} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\varepsilon}} (x-t)^{\alpha-1}\mathrm{dt},$$

$$I_2(x,\varepsilon) = \omega \frac{1}{\varepsilon}\int_{\delta}^{\mathrm{x}} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\varepsilon}} (x-t)^{\alpha-1}\mathrm{dt}, \qquad 0 < \delta$$

Из этих выражений получим оценки

$$|I_1(x,\varepsilon)| \le m\frac{1}{\varepsilon}\delta^{\alpha}, |I_2(x,\varepsilon)| \le m$$

Если параметр δ выбрать, так чтобы $\delta^{\alpha} = \varepsilon^{\beta}$, тогда

$$|I_1(x,\varepsilon)| \le m\varepsilon^{\beta-1}.$$

Теорема доказана.

3. **Сингулярновозмущенное нелинейное интегро-дифференциальное уравнение Абеля первого порядка**

Теперь вместо уравнения (1), рассмотрим нелинейное регуляризованное уравнение

$$\int_0^{\mathrm{x}} (\mathrm{x}-\mathrm{t})^{-\alpha}\left[\mathrm{y}(\mathrm{t}) + \varepsilon^{\gamma}\frac{dy(t)}{dt} - \varepsilon^2 y^2(\mathrm{t})\right]\mathrm{dt} = \mathrm{f}(\mathrm{x}) \qquad \mathbf{(7)}$$

где− *число* $0 < \gamma = (1-\beta)^{-1}$, с начальным условием (5)

Задача (7) и (5) эквивалентна к следующей задаче

$$\varepsilon^{\gamma}\frac{dy(x)}{dx}(\mathrm{x}) = -\mathrm{y}(\mathrm{x}) - \varepsilon^2\mathrm{y}^2(\mathrm{x}) + \mathrm{F}(\mathrm{x}), \qquad \mathrm{y}(0) = 0\,. \qquad \mathbf{(8)}$$

В силу теоремы 1 для решения линеаризованной задачи (8), то есть для задачи

$$\varepsilon^{\gamma}\frac{dz(x)}{dx}(\mathrm{x}) = -\mathrm{z}(\mathrm{x}) + \mathrm{F}(\mathrm{x}), \qquad \mathrm{z}\,(0) = 0$$

имеет место оценка

$$\left| \mathrm{g}\,(\mathrm{x}, \varepsilon) \right| \le m\varepsilon^{-1}$$

Задачу (8) запишем в виде

$$y(\mathrm{x}) = \varepsilon^{-1}\,\mathrm{g}\,(\mathrm{x}, \varepsilon) + \varepsilon^{2-\gamma} \int_0^{\mathrm{x}} e^{\frac{-(x-s)}{\varepsilon^{\gamma}}}\, \mathrm{y}^2(\mathrm{s})\,\mathrm{ds}, \qquad (9)$$

где $\left| \mathrm{g}\,(\mathrm{x}, \varepsilon) \right| \le m.$

Лемма 1. Для любой непрерывной функции $\mathrm{h}(\mathrm{x}, \varepsilon) \in C^{(0)}[0,1]$ имеет место оценка

$$\left| \varepsilon^{-\gamma} \int_0^{\mathrm{x}} e^{\frac{-(x-s)}{\varepsilon^{\gamma}}}\, h(s, \varepsilon)\,\mathrm{ds} \right| \le m.$$

Доказательство леммы очевидно.

Теорема 2. Асимтотика решение задачи (9) можно представитьв виде обобщенного асимптотического ряда Пуанкаре

$$\mathrm{y}(\mathrm{x}) = \varepsilon^{-1} g(\mathrm{x}, \varepsilon) + y_0(\mathrm{x}, \varepsilon) + \varepsilon y_1(\mathrm{x}, \varepsilon) + \cdots + \varepsilon^m y_m(\mathrm{x}, \varepsilon) + \cdots \qquad (10)$$

где $y_k(\mathrm{x}, \varepsilon)$ $(k = 0,1, \dots)$ равномерно ограниченные функции, причем этот ряд сходится равномерно на отрезке [0,1].

Доказательство проведем методом фиктивного параметра, т.е. в уравнении (9) введем параметр λ, который изменяется на отрезке [0,1]:

$$y(\mathrm{x}) = \varepsilon^{-1}\,\mathrm{g}\,(\mathrm{x}, \varepsilon) + \varepsilon^{2-\gamma} \lambda \int_0^{\mathrm{x}} e^{\frac{-(x-s)}{\varepsilon^{\gamma}}}\, \mathrm{y}^2(\mathrm{s})\,\mathrm{ds}\,. \qquad (11)$$

Подставляя (10) в (11) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, для определения $y_{\mathrm{m}}(\mathrm{x}, \varepsilon)$ $(m = 0,1,2, \dots)$ получим уравнения

$$y_0(\mathrm{x}, \varepsilon) = 2\varepsilon^{1-\gamma} \int_0^{\mathrm{x}} e^{\frac{-(x-s)}{\varepsilon^{\gamma}}}\, \mathrm{g}\,(\mathrm{x}, \varepsilon)^2(\mathrm{s})\,\mathrm{ds},$$

$$y_1(\mathrm{x}, \varepsilon) = 2\varepsilon^{1-\gamma} \int_0^{\mathrm{x}} e^{\frac{-(x-s)}{\varepsilon^{\gamma}}}\, y_0(\mathrm{x}, \varepsilon)\,\mathrm{g}(\mathrm{x}, \varepsilon)\,\mathrm{ds},$$

$$y_2(\mathrm{x}, \varepsilon) = \varepsilon^{2-\gamma} \int_0^{\mathrm{x}} e^{\frac{-(x-s)}{\varepsilon^{\gamma}}}\, \mathrm{g}\,(\mathrm{x}, \varepsilon)^2(\mathrm{s})\,\mathrm{ds},$$

…………………………………………..

В силу Леммы 1, из этих выражений все функции $\mathrm{y}_{\mathrm{m}}(\mathrm{x}, \varepsilon)$ определяются ограниченными функциями.

Доказательство равномерной ограниченности ряда (10) вытекает из того, что мажорантным уравнением для (11) является алгебраическое уравнение

$$a = \mathrm{m}\varepsilon^{-1} + \varepsilon^2 \lambda\, a^2 \qquad (12)$$

решение, которого можно представить в виде сходящего ряда

$$a = a_{-1}\varepsilon^{-1} + a_0 + a_1\lambda\varepsilon + \ldots + a_m(\lambda\varepsilon)^m + \ldots, \tag{13}$$

так как уравнение (12) имеет решение

$$a = (2\varepsilon^2\lambda)^{-1}(1 - \sqrt{1 - 4m\lambda\varepsilon}) \; .$$

Постоянная a разлагается в ряд вида (13) при условии, что

$$8m\lambda\varepsilon \le 1 \quad .$$

Это условие выполняется для любого $\lambda \in [0,1]$, если параметр ε мало. Теорема 2 доказана.

Заключение

Здесь неклассическое решение уравнения Абеля первого рода приближается сингулярно возмущенным линейным или нелинейным интегро- дифференциальным уравнением типа Абеля и в результате получим классическое приближенное решений этих уравнений.

Список литературы

1. Alymkulov K., Belekov K. Asymptotics of the solution of a singular perturbed integro differential equation of the type of Abel. Intern. conference MADEA-8, Mathematical analysis, Differential equations &Applications, Abstracts, Issyk-Kul, Kyrgyz Republic, June 17-23, 2018, p.27.
2. Gakhov F. D. Boundary Value Problems, Pergamon Press, Oxford, 1966, 564 p.
3. Gockenbach S. Mark Linear Inverse Problems and Tikhonov Regularization. NewYork, MMA press, 2016. - 320 p.
4. Hochstadt H. Integral equations, New York, John Wiley , 1973, 282 p.
5. Kanwal R. P. Linear integral equations theory and technique, New York. Academic Press, 1971, 258 p
6. Lovitt W.V. Linear Integral equations. – New York, Dover pub., 1950, 272 p.
7. Mandal B.N. Chakrabati A. Applied singular integral equations, - Florida, USA, CRC press, 2011, 260 p.
8. Mikhlin S.G. Integral equations.- London, Pergamon Press,1964, 341 p.
9. Muskhelishvili N.I. Singular Integral Equations: Boundary problems of functions theory and their applications. Springer, Netherlands, 2011.-447 p.
10. Tricomi F. G. Integral equations.- New York, Dover pub., 1985, 256 p.