УДК 517.928

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ АРГУМЕНТА

Алымкулов Келдибай,

Институт фундаментальной и прикладной математики при Ошском государственном университете, директор, д. ф.-м. наук, профессор.

Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич,

Ошский государственный университет, научный сотрудник, к.ф.-м.н.

Аннотация

Уравнение Бесселя встречаются в задаче о колебаниях круглой мембраны, диффузии газа при наличии распада и при цепных реакциях, но и в очень большом числе других физических и технических задач. Известны интегральные представления Бесселя, Неймана, Пуассона, Шлефли, Зоммерфельда, Мехлера-Сонина решения уравнения Бесселя. Обычно , асимптотичекое разложения решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента получают из интегральных представлений его решений, при чем полученные решения носит асимптотический характер, т.е. не являются сходящимися при больших значениях аргумента. Здесь, сначала асимптотика решения уравнения нулевого порядка Бесселя, получена прямо из его уравнения приведением его к уравнению Риккати. Решение уравнения Риккати ищется в виде ряда по убывающим степеням аргумента, методом неопределенных коэффициентов. Доказана сходимость полученного решения методом мажорант, то есть строится алгебраическое уравнение решение которого является мажорантом для данного решения уравнения Риккати. Далее , асимптотика решения уравнения Бесселя любого порядка при больших значенях аргумента, также, получена прямо из его дифференциального уравнения сведением к интегральному уравнению Вольтерра при больших значениях аргумента.

Ключевые слова: Уравнение Бесселя, цилиндрические функции, принцип сжимающих операторов, сведение к интегральному уравнению, метод неопределенных коэффициентов, асимптотика решения, уравнение Риккати, метод мажоранты.

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF BESSEL AT LARGE VALUES OF THE ARGUMENT

The Bessel equation is found in the problem of oscillations of a circular membrane, gas diffusion in the presence of disintegration and in chain reactions, but also in a very large number of other physical and technical problems. The integral representations of Bessel, Neumann, Poisson, Schlefli, Sommerfeld, Mechler-Sonin are known for solving the Bessel equation. Usually, the asymptotic expansion of the solution of the Bessel equation for large values of the argument is obtained from the integral representations of its solutions, and the resulting solutions are asymptotic in nature, i.e. are not convergent. Here, first, the asymptotic solution of the equation of the zero order of Bessel is obtained directly from its equation by reducing it to the Riccati equation. The convergence of the obtained solution is proved by the majorant method. Further, the asymptotics of the solution of the Bessel equation of any order for large values of the argument is also obtained directly from its differential equation by reducing to the Volterra integral equation.

Key words: Beesel equation, cylindrical functions, the principle of contraction operators, reduction to an integral equation asymptoticы of solution, method of undetermined coefficients Riccati equation, method of majorant.

1. Введение

Уравнение

$$y''(x)+\frac{1}{x}y'(x)+\left(1-\frac{\gamma^2}{x^2}\right)y(x)=0 \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ - порядок функции Бесселя, Фридриха Бесселя немецкого математика (1784-1846) впервые определено швейцарским математиком Даниилом Бернулли и назван в честь его . Решение уравнения Бесселя также называют цилиндрическими функциями.Важность исследования решения уравнения Бесселя заключается в том что, оно возникает при решении многих задач математической физики, такие , например, при решении задач Дирихле для клиновидной области , задач теплопроводности в цилиндрических областях, форм колебаний тонкой круглой мембраны, распределений интенсивности света на круглом отверстии, волновых функций в сферически симметричном потенциальном ящике, при обрабоке сигналов и так далее. Поэтому, исследование свойств его решений играют важый роль для прикладной математики.

Обычно, асимптотику решения при больших значения аргумента, т.е. независимой переменной при фиксированной постоянной порядка, получают из его интегральных представления.

Здесь нами предложен альтернативный метод получения его решения, непосредственно из его дифференциального уравнения.

2. Уравнение Бесселя нулевого порядка

Сначала рассмотрим уравнение Бесселя нулевого порядка $\gamma=0$, т.е.

$$y''(x)+\frac{1}{x}y'(x)+y(x)=0 \qquad (2)$$

Очевидно, что точка нуль является регулярный особой, а точка на бесконечности иррегулярной точкой этого уравнения. Содержание данной статьи докладывался на международной конференции посвященой восьмидесялетию академика АН УССР А.М. Самойленко [1]

3. Метод сведения к уравнению Риккати

В (2) сделаем подстановку

$$y(x)=e^{\int_a^x S(t)dt} \quad , \qquad (3)$$

где a –большое положительное число.

Тогда

$$\frac{dy}{dx}=S(x)e^{\int_a^x S(t)dt},$$

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}=\frac{dS(x)}{dx}e^{\int_a^x S(t)dt}+S^2(x)e^{\int_a^x S(t)dt}$$

Тогда, подставляя эти выражения для $S(x)$ в уравнение (2), получим уравнение типа Риккати следующего вида

$$S'(x) + S^2(x) + \frac{1}{x}S(x) + 1 = 0 \quad (4)$$

За нулевое приближение решения уравнения (4) берем решение уравнения

$$S_0^2(x) + 1 = 0$$

Отсюда

$$S_0(x) = \pm i$$

Решение уравнения (4) ищем в виде

$$S(x) = \pm i + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + a_3 x^{-3} + \cdots, \quad (5)$$

где $a_k -$ пока неопрделенные постоянные. Тогда

$$\frac{dS}{dx} = -a_1 x^2 - 2a_2 x^{-3} - 3x^{-4} + \cdots \quad (6) \qquad S^2(x) = -1 \pm 2ia_1 x^{-1} + (a_1^2 \pm 2a_2 i x^{-2}) \pm (2a_3 + 2a_1 a_2)x^{-3} + \cdots, \quad (7)$$

Вставляя (5),(6),(7) в (4) получим

$$-a_1 x^{-2} - 2a_2 x^{-3} - 3x^{-4} + \cdots - 1 \pm 2ia_1 x^{-1} + (a_1^2 \mp 2a_2 i)x^{-2} \pm$$
$$+(2a_3 + 2a_1 a_2)x^{-3} + \cdots \pm ix^{-1} + a_1 x^{-2} + a_2 x^{-3} + \cdots + 1 = 0$$

Отсюда приравнивая коэффициентом при одинаковых степенях x, имеем:

$$a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \pm\frac{i}{8}, \quad a_3 = \pm\frac{i}{8}, \quad \cdots$$

Таким образом

$$S(x) = \pm i - \frac{1}{2}x^{-1} \pm i\frac{1}{2}x^{-2} \pm \frac{i}{8}x^{-3} + O(x^{-4}), \; x \to \infty.$$

Отсюда, интегрируя это выражение, получаем решение уравнения Бесселя нулевого порядка

$$y(x) = \beta e^{\pm ix}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{\pm i\frac{1}{8}x^{-2} \pm \frac{i}{8}x^{-3} + O(x^{-4})}, \; x \to \infty$$

где β – некоторая постоянная .Мы получили формальное доказательство следующей теоремы. Теорема1. Решения уравнения (4) при больших значениях x можно представить следующим асимптотическим рядом

$$S(x) = \pm i - \frac{1}{2}x^{-1} + a_2 x^{-2} + \cdots a_m x^{-m} + \cdots, x \to \infty \quad (5*)$$

где a_k- некоторые постоянные, т.е. если прервать этот ряд, то он имет вид

$$S(x) = \pm i - \frac{1}{2}x^{-1} + a_2 x^{-2} + \cdots + a_m x^{-m} + x^{-m-1}R(x)$$

где $a_0 = \pm i, \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \ldots; \quad R(x)$ –ограниченная функция.

Теорема 2. Ряд (5) или (5∗) является асимптотическим рядом, то есть

$$S(x) = \pm i - \frac{1}{2}x^{-1} + a_2x^{-2} + \cdots + a_nx^{-m} + R(x)\,, \qquad \mathrm{x} \to \infty$$

где $|R_{m+1}(x)| \le lx^{-m+1}(l = const)$.

Для простоты эту теорему докажем для m=1, т.е. положим

$$S(x) = \pm \boldsymbol{i} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^{-1} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \tag{8}$$

Покажем, что $|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})| \le \boldsymbol{l}\boldsymbol{x}^{-2}$.

Имеем

$\boldsymbol{S}^2(\boldsymbol{x}) = -\mathbf{1} \mp \boldsymbol{i}\boldsymbol{x}^{-1} \pm \mathbf{2}\boldsymbol{i}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}^{-1}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{4}\boldsymbol{x}^{-1} + \boldsymbol{u}^2(\boldsymbol{x})$. (9)

Подставляя (8) и (9) в (4) для u(x) получим следующее уравнение

$$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u}^2(\boldsymbol{x}) \pm \mathbf{2}\boldsymbol{i}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \tfrac{1}{4}\boldsymbol{x}^{-2} = \mathbf{0} \tag{9}$$

Линейное уравнение $\boldsymbol{u}_0'(\boldsymbol{x}) \pm \mathbf{2}\boldsymbol{i}\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{4}\boldsymbol{x}^{-2} = \mathbf{0}$ имеет решение

$$\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}) = \mathbf{4}^{-1}\boldsymbol{e}^{\mp 2ix} \int_{x}^{\infty} \boldsymbol{e}^{\pm 2is}\boldsymbol{s}^{-2}\boldsymbol{ds}$$

которое стремится к нулю при $\boldsymbol{x} \to \infty$.

Очевидно, это выражение имеет оценку

$$|\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})| \le \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^{-2}, \quad \boldsymbol{x} \to \infty \tag{10}$$

где a-некоторое действительное число.

Обозначим множество функций удовлетворующих условию (10) через Q. Решение уравнения (9) стремящихся к нулю при $\boldsymbol{x} \to \infty$ представим в виде

$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}) = \int_x^\infty \boldsymbol{e}^{\mp 2i(x-s)}\boldsymbol{u}^2(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds} \coloneqq \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})$ (10)

Очевидно, что оператор T переводит множество Q в себя. Действительно, имеем

$$|\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})| \le \boldsymbol{a}^2 \int_x^\infty \boldsymbol{S}^{-4}\boldsymbol{ds} = \frac{\boldsymbol{a}^2}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x}^{-3} \le \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^{-2}$$

С другой стороны оператор T является сжимающим в множестве Q. Действительно, для $\boldsymbol{u}_1, \ \boldsymbol{u}_2 \in \boldsymbol{Q}$ имея

$$|\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}_1) - \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}_2)| \le \int_x^\infty [|\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{s}) + \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{s})|]\, \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{s}) - \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{s})|\boldsymbol{ds} \le \mathbf{2}\boldsymbol{a}\int_x^\infty \boldsymbol{s}^{-2}|\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{s}) - \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{s})|\,\boldsymbol{ds} \le$$

$$\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{-1}||\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|| \le \tfrac{1}{2}||\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2||$$

где ||u||=sup $|\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x})|$.

Поэтому для решение уравнения (10) имеет место оценка $|\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) \le \mathbf{2}\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^{-2}$.

Теорема доказана.

Верна более сильная

Теорема 2. Ряд (5) сходится равномерно при больших значениях x.

Эту теорему докажем методом мажорант. В (10) сделаем преобразование

$$\boldsymbol{u(x) = x^{-2}z(x)} \qquad (11)$$

Тогда оно имеет вид

$$\boldsymbol{z(x) = x^2u_0(x) + x^2\int_x^{\infty} e^{\mp 2i(x-s)}s^{-4}z^2(s)ds} \qquad (12)$$

Отсюда, так как $\left|\boldsymbol{x^2u_0(x)}\right| \leq \boldsymbol{a}$, отсюда получим следующее мажорантное уравнение для $\boldsymbol{z(x)}$:

$$\boldsymbol{\rho(x) = a + \frac{1}{3}x^{-1}\rho^2(x)}$$

Решение этого уравнения которое ограничено при $\boldsymbol{x} \to \infty$ имеет вид

$$\boldsymbol{\rho = \frac{3x}{2}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4}{3}ax^{-1}}\right]} \qquad (13)$$

Решение уравнения (13) можно представить в виде сходящегося ряда

$$\boldsymbol{\rho(x) = a + \rho_1x^{-1} + \rho_2x^{-2} + \ldots + \rho_mx^{-m} + \cdots}$$

где $\boldsymbol{\rho_m}$ − некоторые положительные постоянные.

Таким образом, решение уравнения (6) представляется сходящимся рядом (5) при $\boldsymbol{x > \frac{4}{3}a}$.

Далее рассмотрим уравнение Бесселя любого порядка

4. Уравнение Бесселя любого порядка

Рассмотрим уравнение

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left(1 - \frac{\gamma^2}{x^2}\right)y(x) = 0\,, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ - порядок функции Бесселя. После преобразования (2), это уравнение имеет вид

$$\boldsymbol{S'(x) + S^2(x) + \frac{1}{x}S(x) + \left(1 - \frac{\gamma^2}{x^2}\right) = 0} \qquad (14)$$

Решение этого уравнения при больших значениях аргумента x , ищем в виде ряда

$$\boldsymbol{S(x) = \pm i + s_1x^{-1} + s_2x^{-2} + s_3x^{-3} + \cdots,} \qquad (15)$$

Тогда, подставляя (14) и (15) в уравнение (1) для значений s_k имеем значения

$$s = -\frac{1}{2}, \quad s_2 = \pm\, i\left(\frac{1}{8} - \gamma^2\right), s_3 = \pm\left(\frac{1}{8} - \gamma^2\right), s_4 = \pm i\left(\frac{1}{8} - \gamma^2\right) \pm i\,\left(\frac{1}{8} - \gamma^2\right)^2, \cdots.$$

(16)

Таким образом, мы получили формальное доказательство следующей теоремы

Теорема 3 Решение уравнения (14) при больших значения аргумента x можно представить в виде ряда (15),где коэффициенты $\boldsymbol{s_k}$, из выражений (16).

Полное доказательство этой теоремы можно получить методом мажорант , точно также как и выше.

Замечание1. Разложение при больших значениях аргумента для модифицированного уравнения Бесселя

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) + (1 - \frac{\gamma^2}{x^2}) y(x) = 0$$

также можно получить этим методом.

Замечание 2. Асимптотику решения уравнения Бесселя при больших значения аргумента, также можно получить, прямо из исходного уравнения (14).

Заключение

Здесь асимптотика решения уравнения Бесселя при больших значения независимой переменной получена непосредственно из самого дифференциального уравнения, причем даказана сходимость полученного решения методом мажорант.

Список литературы

1. 1. Alymkulov K.,Kozhobekov K. Asymptotics of the solution of the Bessel equation for the large values of the argument. Intern. Conference MADEA-8,Mathematical analysis, Differential equations &Applications, Abstracts, P.28.
2. Де Брейн. Асимптотические методы в анализе. М.: ИЛ, 1961. 247 с.
3. Ильин А.М., Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.
4. Кузнецов Д.С. Специальные функции. Москва.:Высшая школа,1962, 248 с.
5. Найфэ А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
6. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
7. Beals R., Wong R. Special functions: A graduate text, Cambridge University Press, 2010, 449 p.
8. Lebedev N.N. Special functions and their applications. Dover pub., 1972, 336 p.
9. Olver F. Asymptotic and special functions (русс.пер. Асимптотика и специальные функции. Москва, Наука, 1990) , Academic Press, New York, 1974, 572 p.
10. Temme N.M. Asymptotic methods for integrals. World Scientific, New Jersey, London, 2014, 628 p.