УДК 519.857

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ТОРГОВОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

Коваленко М.И.

ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина» (399770, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, 28), dragon39548@gmail.com

В настоящее время достижения математики и вычислительной техники находят все более широкое применение в экономических исследованиях. Одной из основных ставится задача создания единой системы оптимального планирования и управления деятельностью предприятий на базе широкого применения математических методов. Статья посвящена математическим методам оптимизации деятельности торгового предприятия в условиях рыночной экономики. Теория и методы экономико-математического моделирования позволяют строить текущие и перспективные планы, обеспечивать планы необходимыми ресурсами, принимать и реализовывать эффективные управленческие решения. В статье освещаются научные подходы, обеспечивающие решение прикладной задачи оптимизации деятельности торгового предприятия на основе динамических моделей. Особое внимание уделяется математическим аспектам управления запасами торговой фирмы. Решается задача определения оптимального плана выпуска продукции, обеспечивающего заданный спрос при минимизации затрат на ее производство и хранение. В качестве эффективного средства определения оптимальной стратегии управления запасами на торговом предприятии рассматривается метод динамического программирования. Представленная в работе экономико-математическая модель обеспечивает управленческий персонал торгового предприятия необходимой аналитической информацией, повышает адекватность и оперативность принимаемых управленческих решений и тем самым конкурентоспособность предприятия.

Ключевые слова: Торговое предприятие, управление запасами, метод динамического программирования.

ECONOMIC AND MATHEMATICAL MODELING OF TRADE ENTERPRISE ACTIVITY

Kovalenko M.I.

Yelets state University. I. A. Bunin (399770, Lipetsk region, Yelets, ul. Kommunarov, 28), dragon39548@gmail.com

Currently, the achievements of mathematics and computer technology are increasingly used in economic research. One of the main tasks is to create a unified system of optimal planning and management of enterprises on the basis of wide application of mathematical methods. The article is devoted to mathematical methods of optimization of commercial enterprise activity in the conditions of market economy. The theory and methods of economic and mathematical modeling allow to build current and future plans, to provide plans with the necessary resources, to make and implement effective management decisions. The article highlights the scientific approaches that provide the solution of the applied problem of optimization of the commercial enterprise on the basis of dynamic models. Particular attention is paid to the mathematical aspects of inventory management trading company. The problem of determining the optimal plan of production, providing a given demand while minimizing the cost of its production and storage. The method of dynamic programming is considered as an effective means of determining the optimal strategy of inventory management at a trading enterprise. The economic and mathematical model presented in the work provides the management personnel of the trading enterprise with the necessary analytical information, increases the adequacy and efficiency of management decisions and thus the competitiveness of the enterprise.

Key words: Commercial enterprise; inventory management; method of dynamic programming.

Современная экономическая ситуация в России характеризуется усложнением организационной структуры производства, углублением общественного разделения труда, развитием торговой индустрии. В этих условиях существенно возрастают требования к методам планирования и хозяйственного руководства. Широкое применение в менеджменте организаций находят теория и методы экономико-математического моделирования, позволяющие формировать систему целей, строить текущие и перспективные планы, оптимизировать их обеспечение необходимыми ресурсами, принимать эффективные управленческие решения.

В условиях рыночной экономики особое внимание математиков и экономистов привлекает разработка методов совершенствования деятельности торговых предприятий, представляющих собой независимые хозяйствующие субъекты, осуществляющие закупку, хранение, реализацию товаров с целью получения прибыли и удовлетворения потребностей рынка. Организация эффективной деятельности торгового предприятия способствует созданию устойчивых связей между экономическими контрагентами – от производителя до конечного потребителя [4].

В то же время анализ работ в области экономико-математического моделирования показывает, что проблемы планирования деятельности торговых предприятий остаются малоизученными. Большинство математических моделей, разработанных в сфере коммерческой деятельности, относятся к производственным организациям. При этом вопросы оптимизации рассматриваются не в комплексе, а по отдельным этапам и сферам деятельности: оптимизация инвестиционной политики, управление оборотным капиталом, планирование производственной мощности предприятия, управление запасами, эффективное использование трудовых ресурсов, составление оптимальных маршрутов, расписаний и др.

Недостаточная разработанность проблемы выявления совокупности экономико-математических методов оптимизации деятельности торгового предприятия в условиях рыночной экономики определяет актуальность темы исследования. Предметом исследования выступают модели и методы линейного и динамического программирования как инструментальные средства оптимизации деятельности торгового предприятия.

Динамическое программирование – метод оптимизации, приспособленный к операциям, в которых процесс принятия решения может быть разбит на этапы (шаги). Такие операции называются многошаговыми. В данной статье рассматривается математический подход к решению задачи оптимального управления запасами. Возникновение задач этого типа связано с работами Ф. Эджуорта и Ф. Харриса, появившимися в конце 19 − начале 20 века, в которых исследовалась простая оптимизационная модель для определения экономичного размера партии поставки для складской системы с постоянным равномерным расходом и периодическим поступлением хранимого продукта [5].

Запасом называется любой ресурс, который хранится для удовлетворения будущих нужд. Примерами запасов могут стать полуфабрикаты, готовые изделия, материалы, различные товары, а также денежная наличность, находящаяся в хранилище. Причинами создания запасов являются дискретность поставок, случайные колебания спроса за период между поставками, объема поставок, сезонность спроса или производства. Существуют также причины, побуждающие предприятия минимизировать запасы: плата за хранение, физические потери при хранении; моральный износ продукта [3].

Рассмотрим предприятие, производящее партиями некоторые изделия. Предположим, что оно получило заказы на n месяцев, причем размеры заказов меняются от месяца к месяцу, поэтому иногда целесообразнее выполнить одной партией заказы нескольких месяцев и затем хранить изделия, пока они не потребуются. Необходимо составить план производства на указанные месяцы с учетом затрат на производство и хранение.

Введем обозначения:

u_i – число изделий, производимых в j-й месяц;

x_j – величина запаса к началу j-го месяца;

d_j – число изделий, отгружаемых в j-м месяце;

$f_j(x_{j+1},u_j)$ – затраты производство и хранение изделий в j-м месяце.

Считаем, что величины запасов к началу первого месяца x_1 и к концу последнего x_{n+1} заданы. Задача состоит в том, чтобы найти план производства

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

компоненты которого удовлетворяют условиям баланса

$$x_j+u_j-d_j=x_{j+1}, \quad j=1,2,\ldots, n \qquad (2)$$

и минимизируют суммарные затраты за весь планируемый период

$$z = \sum_{j=1}^{n} f_j\left(x_{j+1}, u_j\right) \to \min, \qquad (3)$$

При этом $x_j \in \{0,1,2,3, \ldots\}$, $u_j \in \{0,1,2,3, \ldots\}$, $j = 1,2, \ldots, n$ (4)

Заметим, что для любого месяца j величина x_{j+1} запаса к концу месяца должна удовлетворять ограничениям

$$0 \le x_{j+1} \le d_{j+1}+d_{j+2}+\ldots+d_n, \qquad (5)$$

т. е. объем производимой продукции u_j на этапе j может быть настолько велик, что запас x_{j+1} удовлетворяет спрос на всех последующих этапах, но нет смысла иметь x_{j+1} больше суммарного спроса на всех последующих этапах. Кроме того, управление u_j должно удовлетворять ограничениям

$$0 \le u_j \le d_j+x_{j+1} \qquad (6).$$

Рассмотрим общее решение данной задачи методом динамического программирования, взяв за основу алгоритм, представленный в [2].

За параметр состояния x примем наличный запас в конце k-го месяца $x=x_{k+1}$, а функцию состояния $F_k(x)$ определим как минимальные затраты за первые k месяцев при выполнении условия (5):

$$F_k(x) = \min_{u_1,u_2,\dots,u_k} \sum_{j=1}^{k} f_j(x_{j+1}, u_j),$$

где минимум берется по неотрицательным целым значениям u_1, $u_1 \dots, u_k$, удовлетворяющим условиям

$$x_j+u_j-d_j = x_{j+1},$$

$$x_k+u_k-d_k=x \quad (7)$$

Учитывая, что

$$\min_{u_1,u_2,\dots,u_k} \sum_{j=1}^{k} f_j(x_{j+1}, u_j) = \min_{u_k} \left\{ f_k(x_{k+1}, u_k) + \min_{u_1,u_2,\dots,u_{k-1}} \sum_{j=1}^{k-1} f_j(x_{j+1}, u_j) \right\},$$

и величина запаса x_k к концу $(k-1)$-го периода, как видно из уравнения (7), равна $x_k = x+d_k-u_k$ приходим к рекуррентному соотношению

$$F_k(x) = min_{u_k}\{f_k(x, u_k) + F_{k-1}(x + d_k - u_k)\}$$

где минимум берется по переменной u_k, которая, согласно (6), может изменяться в пределах $0 \le u_k \le d_k + x$, причем верхняя граница зависит от значений параметра состояния, изменяющегося в пределах $0 \le x \le d_{k+1} + d_{k+1} + \dots + d_n$, а индекс k может принимать значения $k=2,3,4,\dots, n$.

При $k = 1$

$F_k(x) = min_{u_1}\{f_1(x_2, u_1)\}$, где

$u_1=x+d_1-x_1$,

$0 \le x \le d_2+d_3+\dots+d_n$,

т. е. на начальном этапе при фиксированном уровне x_1 исходного запаса каждому значению параметра x отвечает только одно значение переменной u_1.

Применив вычислительную процедуру динамического программирования на последнем шаге ($k=n$), находим значение последней компоненты u^*_n оптимального решения, а остальные компоненты определяем как

$$u_k^* = u_k^* \left(x_{n+1} + \sum_{j=k+1}^{n} (d_j - u_j^*) \right),$$

$$k = 1,2,\dots,n-1.$$

В качестве конкретного примера рассмотрим деятельность предприятия по производству полуфабрикатов в течение N календарных этапов планирования (месяцев). Каждый n-й этап характеризуется следующими параметрами:

i_{n-1} – величина запаса, оставшаяся на предприятии после окончания предыдущего n–1 -го этапа;

x_n – объем производства предприятия на n-м этапе;

d_n – величина спроса на продукцию предприятия на n-м этапе.

Известна функция затрат c_n на n-м этапе функционирования предприятия, зависящая от объема x_n производства и величины запасов i_{n-1}, которые должны храниться на складе в течение n-го периода.

Необходимо определить объем производства для каждого этапа планирования, при котором суммарные затраты, связанные с производством продукции и ее хранением, были бы минимальны, и в каждом периоде выполнялось ограничение на спрос продукции со стороны потребителей.

Критерий оптимальности представляется в виде:

$F = \sum_{n=1}^{N} c_n(x_n, i_{n-1}) \to min.$

Ограничения:

1) удовлетворение спроса потребителей на продукцию в n-м периоде

$d_n \le i_{n-1} + x_n, \quad n = \overline{1, N};$

2) объем запаса в конце n-го периода

$i_n = i_{n-1} + x_n - d_n, \quad n = \overline{1, N}, \quad i_n = \overline{0, i_{max}}, \quad x_n = \overline{0, x_{max}}.$

Функциональное уравнение Беллмана имеет вид:

$$\boldsymbol{f_n(i_n) = \min_{x_n} (f_{n-1}(i_{n-1}) + c_n(x_n, i_{n-1})).}$$

Рассмотрим решение уравнения Беллмана для случая, когда $c_n(x_n, i_{n-1}) = c_n(x_n) + h \cdot i_{n-1}$,

где $c_n(x_n)$ – затраты на производство продукции на n-м этапе в объеме x_n,

$h \cdot i_{n-1}$ – затраты на хранение продукции на n-м этапе, h – коэффициент;

i_0 – начальный запас продукции;

$c_0(i_0)$ – затраты на его создание;

$h \cdot i_0$ – затраты на его хранение.

Решим рассматриваемую задачу для следующих исходных данных:

- количество интервалов планирования (месяцев) $N=3$;
- величина спроса на полуфабрикаты постоянна для всех этапов:

$d_1 = d_2 = d_3 = 400$ кг/ мес.;

- затраты на формирование начального запаса $c_0(x_0) = 90 \cdot i_0$; (коэффициент 90 складывается из 70 руб./кг – себестоимость одного килограмма полуфабрикатов – и 20 руб./кг идут на заработную плату работников;
- затраты на производство и хранение продукции

$$c_n(x_n, i_{n-1}) = 12000 + 70 \cdot x_n + 10 \cdot i_{n-1};$$

(12000 руб. – месячный расход на заработную плату, 70 руб./кг – себестоимость одного килограмма продукции, 10 руб./кг – стоимость хранения 1 кг продукции в месяц, т.е. затраты на оплату электроэнергии, потребляемой морозильными камерами, а также на текущий ремонт оборудования);

- ограничение на производственные мощности $x_{max} = 600$ кг/мес;
- ограничение на предельный уровень запасов $i_{max} = 400$ кг/мес.

Шаг 1. Решение уравнения Беллмана производится в соответствии с алгоритмом прямой прогонки:

$f_1(i_1) = min(c_1(x_1) + c_0(i_0) + h \cdot i_0),$

$i_1 = x_1 + i_0 - d_1.$

Для решения этого уравнения формируется таблица 1, в которой столбцы соответствуют величине начального запаса, строки – объему производства на первом этапе x_1. Каждая клетка таблицы делится на две части: в нижней части записываются значения состояния в конце первого этапа (значения для переменной i_1): $i_1 = i_0 + x_1 - d_1$.

Если i_1 отрицательно, то такие состояния являются недопустимыми и исключаются из рассмотрения. В частности, для положительного спроса $d_1 > 0$ клетка с $x_1 = 0$ и $i_0 = 0$ является недопустимой. Клетки, соответствующие недопустимым состояниям, отмечаются символом * [6].

В верхней части каждой из клеток записывается значение функции

$$f^*(i_1) = c_1(x_1) + c_0(i_0) + h \cdot i_0.$$

Приведем вычисление ряда функций $f_1^*(i_1)$:

$f_1^*(0) = c_1(0) + c_0(400) + 10 \cdot 400 = 0 + 90 \cdot 400 + 4000 = 40000,$

$f_1^*(0) = c_1(100) + c_0(300) + 10 \cdot 300 = 12000 + 70 \cdot 100 + 90 \cdot 300 + 3000 = 49000,$

$f_1^*(100) = c_1(100) + c_0(400) + 10 \cdot 400 = 12000 + 70 \cdot 100 + 90 \cdot 400 + 4000 = 59000,$

$f_1^*(0) = c_1(200) + c_0(200) + 10 \cdot 200 = 12000 + 70 \cdot 200 + 90 \cdot 200 + 2000 = 46000,$

$f_1^*(100) = c_1(200) + c_0(300) + 10 \cdot 300 = 12000 + 70 \cdot 200 + 90 \cdot 300 + 3000 = 56000,$

$f_1^*(200) = c_1(200) + c_0(400) + 10 \cdot 400 = 12000 + 70 \cdot 200 + 90 \cdot 400 + 4000 = 66000.$

Таблица 1

Расчетная таблица для шага 1

Объем производства x_1	Величина начального запаса				
	$i_0=0$	$i_0=100$	$i_0=200$	$i_0=300$	$i_0=400$
$x_1= 0$	*	*	*	*	40000 $i_1=0$
$x_1= 100$	*	*	*	49000 $i_1= 0$	59000 $i_1 = 100$
$x_1=200$	*	*	46000 $i_1= 0$	56000 $i_1= 100$	66000 $i_1= 200$
$x_1=300$	*	43000 $i_1= 0$	53000 $i_1=100$	63000 $i_1=200$	73000 $i_1= 300$
$x_1=400$	40000 $i_1 =0$	50000 $i_1=100$	60000 $i_1=200$	70000 $i_1=300$	80000 $i_1=400$
$x_1 = 500$	47000 $i_1= 100$	57000 $i_1 = 200$	67000 $i_1= 300$	77000 $i_1 = 400$	*
$x_1 = 600$	54000 $i_1=200$	64000 $i_1 = 300$	74000 $i_1= 400$	*	*

Среди допустимых клеток находятся клетки с одинаковыми значениями состояний, в качестве оптимальной выбирается клетка, для которой $f^*\ (i_1)$ принимает минимальное значение, т.е. $f(i_1) = \min\{f^*(i_1)\}$. Для каждого состояния фиксируется оптимальный объем производства x_1. Результаты представляются в окончательной таблице для первого шага: в первом столбце приводится перечень состояний, во втором – оптимальный объем производства для каждого из состояний; в третьем – оптимальные затраты на производство и хранение запаса для первого календарного периода. Максимальное значение состояния первого этапа ограничивается i_{max}, т.е. $i_1= i_{max}$, а минимальное – $i_1=0$.

Итоговая таблица для шага 1

Объем запаса i_1	Объем производства x_1	Функция затрат $f_1(i_1)$
$i_1 = 0$	$x_1 =400$	$f_1\ (0)=40000$
$i_1 = 100$	$x_1=500$	$f_1(100)=47000$
$i_1 = 200$	$x_1=600$	$f_1\ (200)=54000$
$i_1 = 300$	$x_1 =600$	$f_1\ (300)=64000$
$i_1 = 400$	$x_1 =600$	$f_1\ (400)=74000$

Аналогичные действия выполняются для всех этапов, пока n не достигнет значения N.

Для нахождения оптимальных объемов производства x_n и оптимальных уровней запаса i_n производим решение задачи в обратном порядке:

$$i_3 = 0,\ x_3 = 0;\ i_2 = 400,\ x_2 = 600;\ i_1=200,\ x_1 = 600;\ i_0 = 0.$$

Вывод: для минимизации затрат на производство и хранение продукции, предприятию следует в первые два месяца производить на максимальной мощности, а в третьем месяце – только реализовать имеющиеся запасы. Такой режим работы может повторяться неоднократно.

Список литературы:

1. Жук Л.В., Прокуратова О.Н. Лекции по исследованию операций. – Елец, 2010. – 77 с.

2. Жук Л.В., Прокуратова О.Н. Лекции по математическому программированию и теории игр. – Елец, 2011. – 123 с.

3. Колемаев, В.А. Математическая экономика. − Юнити-Дана, 2005.− 405 с.

4. Кузнецов, Б.Т. Математические методы и модели исследования операций. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.−305 с.

5. Рыжиков, Ю.И. Теория очередей и управление запасами. – СПб., 2001. − 251 с.

6. Черноморов Г.А. Теория принятия решений. – Новочеркасск: Ред. журн. «Изв. вузов. Электромеханика», 2002. – 276 с.