УДК 51-32

Занимательная арифметика 2

Лутфулин М.Д.[1](студент второго курса), Селиверстова И.Ф. [1](кандидат физико-математических наук)

1 Красноярский институт железнодорожного транспорта – филиал ФГБОУ ВО ИрГУПС

Аннотация

Предлагаемая работа является продолжением статьи «Занимательная арифметика» Тихонова Д.А., Селиверстовой И.Ф. . Здесь рассмотрим несколько различных общих и частных случаев умножения первых сомножителей, из различных, но одинаковых цифр на двучлены, трёхчленов, составленных из произвольных цифр главным образом, для случаев, когда количество цифр в первом сомножителе $n_1 \geq n_2$ - количества цифр второго сомножителя. Ответ во всех случаях состоит из 3-ёх частей: первой (начальной), средней (второй) и последней (3-ей) части. Рассмотрены случаи, когда результат произведения легко составить, зная последнюю (3-тью) и среднюю часть ответа или первую и среднюю часть. Периодическую цифру средней части можно находить и независимо от остальных. Для практических целей наиболее интересным является общий метод нахождения произведения при нахождении сначала первой части ответа и периодической цифры второй (а значит и её части). Для рассмотренных некоторых частных случаев методы нахождения произведений упрощаются в зависимости от цифр первого сомножителя. Наибольший интерес представляет собой произведение, когда первый сомножитель состоит из тройки или пятёрки.

Entertaining arithmetic 2

Lutfullin M.D.[1](second year student), Seliverstova I.F.[1](candidate of physical and mathematical Sciences)

1 Krasnoyarsk Institute of railway transport - branch of FGBOU VO Irgups

Annotation.

The proposed work is a continuation of the article "Entertaining arithmetic" Tikhonov D. A., Seliverstova I. F. . Here we consider several different General and special cases of multiplication of the first cofactors, from different but identical digits to binomial, trinomial, composed of arbitrary digits mainly for cases where the number of digits in the first cofactor $n_1 \geq n_2$ - the number of digits of the second cofactor. The answer in all cases consists of 3 parts: the first (initial), middle (second) and last (3rd) part. We consider cases when the result of the product is easy to make, knowing the last (3-TEW) and the middle part of the answer or the first and middle part. The periodic figure of the middle part can be found independently of the rest. For practical purposes, the most interesting is the General method of finding the product when finding first the first part of the answer and the periodic figure of the second (and hence its part). For consideration of some special cases, the methods of finding products are simplified depending on the digits of the first factor. The most interesting is the product when the first factor consists of a triple or five.

В статье продолжено рассмотрение общих и частных случаев умножения 1-ого сомножителя, состоящего из однородных цифр в количестве n_1 на 2-ой сомножитель, составленный из произвольных цифр в количестве n_2. В основном рассматриваются случаи, когда $n_1 \geq n_2$.

Отметим особенности структуры ответа таких произведений, указанные в [1]. В общем случае ответ состоит из 3-ёх частей: 1-ой (начальной), 2-ой (средней) и 3-ей (конечной). Общее количество цифр ответа равно n_1+n_2. 1-ая и 3-ая часть состоят из n_2 цифр каждая. При необходимости к 1-ой части может добавляться 0. Например: 3333*1=36663=036663. Самая консервативная - 3-я часть ответа. Она не меняется с увеличением n_1. Самая вариабельная по количеству цифр – средняя часть (2-ая). Количество цифр, которые здесь появляются = Δ, а Δ=n_1-n_2.

Средняя часть ответа – это периодическое число или непериодическое число со сбоем (когда последняя цифра на единицу меньше). При Δ→0, цифра сбоя исчезает последней.

При Δ=n_2, число средней части имеет равное с остальными частями ответа количества цифр. Назовём его особым числом средней части. В случае периодической средней части оно равно сумме чисел 1-ой и 3-ей частей. В случае сбоя оно меньше каждого из них.

Замечание: если вторая часть со сбоем, то при $\Delta \geq 1$ к первой части ответа прибавляется 1.

Пример: 77*88=6776; 77777*88=6844376

443 – средняя часть, 43 - особое число средней части, 3 – цифра сбоя, 4 - периодическое число.

В случае сбоя если известна, например, 1-ая и 2-ая части ответа, то 3-ю находим как разность, между числом, состоящим из периодических цифр в количестве n_2, к которым впереди добавлена единица. Для привёденного примера 144-68=76 – 3-я часть ответа (или 144-76=68 – первая часть, если известна 3-я и наоборот). Средняя часть ответа можно находить независимо от остальных. Для этого второй сомножитель умножаем на цифру 1-ого и полученное произведение пошаговым суммированием приводим к простому числу. Если число операций суммирования (порядок простого числа) к $\leq n_2$, то средняя часть ответа периодическое число, а если к$\geq n_2$, то число со сбоем.

Примеры:

Если средняя часть без сбоя, то изменений в 1-ой части нет: 777*123=14**2**191, 77777*123=14**2**33191. В случае сбоя имеем: 55*58=3**1**90, 5555*58=3**2**2190.

Нахождение средней части ответа:

Среднюю часть ответа можно находить независимо от 1-ой и 3-ей его части. Для этого надо 2-ой сомножитель умножить на цифру 1-ого и полученное произведение пошаговым суммированием привести к простому числу. Если число операций суммирования (порядок простого числа) $\boldsymbol{k} \leq n_2$ то средняя часть ответа только периодическое число, а если $\boldsymbol{k} > n_2$ - средняя часть со сбоем.

Примеры.

$$\boxed{\begin{array}{r} 5555 \\ 683 \\ \hline 3794065 \end{array}}$$

Δ=1; 683×5=3415→346→(40)→4 - периодическое число средней части ответа. Так как к=3=n_2 то сбоя нет и средняя часть 4 (Δ=1), а особое число средней части 444 и 379+065=444.

$$\boxed{\begin{array}{r} 88888 \\ 654 \\ \hline 58132752 \end{array}}$$

Δ=2; 654*8=5232→525→57→12→3; к=4 $> 3 = n_2$ -имеем сбой. Средняя часть ответа – 32, а особое число 332
581+752=1333 – см [1].

Замечание: другой порядок получения простого числа $\boldsymbol{\kappa}$ может не дать правильного ответа относительно сбоя.

Различные общие способы умножения первого сомножителя на двучлены трёхчлены и т.д.

Метод 1.Умножение каждой цифры 2-го сомножителем на цифру первого.

1) $$\boxed{\begin{array}{r} 4444 \\ 326 \\ \hline 1448744 \end{array}}$$

(3*4)(2*4)(6*4) → (12)(08)(24); затем справа налево записываем суммы нечётного количества цифр в последовательности 1,3,5 и т.д. поучим 744, где 1)4; 2)2+4+8=14→ $4_{(1)}$; 3)4+2+8+0+2+(1)= 17→ $7_{(1)}$

Замечание: записываем единицы с учётом предыдущих индексов.

744 – 3-я часть ответа. Для получения цифры средней части суммируем все цифры скобок с учётом индексов

4)4+2+8+0+2+1+(1)=18→ $8_{(1)}$; 8$>$7, следовательно 8 –периодическая цифра средней части ,а так как Δ=1 то средняя часть ответа- 8. Особое число средней части 888, тогда число 1-ой части 888-744=144. Ответ: 1448744.

Но первую часть можно найти, суммируя цифры скобок слева направо в количестве 5,3,1 (с учётом предыдущих индексов). 5)1+2+0+8+2+(1)=14+$4_{(1)}$; 6)1+2+0+(1)=4; 7)1. Записываем с конца слева направо, получим 144 – первая часть ответа.

Метод 2. Нахождение произведение первых сомножителей, состоящих из разного количества одинаковых цифр на двучлены, трёхчлены и т.д. из произвольных цифр если известно произведение одной цифры 1-ого сомножителя на соответствующий 2-ой.

Дано: $\boxed{\begin{array}{r} 6 \\ 23 \\ \hline 138 \end{array}}$ (*) Найти $\boxed{\begin{array}{r} 66 \\ 23 \\ \hline ? \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{r} 666 \\ 23 \\ \hline ? \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{r} 6666 \\ 23 \\ \hline ? \end{array}}$

Правило: последняя цифра во всех ответах сохраняется. Затем от конца к началу в (*) пошагово суммируются соседние цифры ответа (*) до первой включительно, затем записывается 1-ая цифра. Максимальное количество суммируемых цифр задается величиной n_1 . Причем, если их >2, то пошагово достигнув максимума, их количество аналогично уменьшают до 1-ой цифры, если Δ=0.

Если Δ≥1, то максимальную сумму повторяют Δ раз. Во всех случаях учитываются индексы.

1) (*) $\boxed{\begin{array}{r} 66 \\ \underline{23} \\ 1518 \end{array}}$ Из (*) имеем справа налево 8; (3+8=11→ $1_{(1)}$); (3+1+(1)=5); 1. Получим 1518. Полученные цифры слева направо записываем в ответе с конца к началу

2) (*) $\boxed{\begin{array}{r} 666 \\ \underline{23} \\ 15318 \end{array}}$ Из (*) следует 8; (8+3=11→ $1_{(1)}$); (8+3+1+(1)=13→ $3_{(1)}$; (3+1+0=5);1 Получим 15318

3) (*) $\boxed{\begin{array}{r} 6666 \\ \underline{23} \\ 153318 \end{array}}$ Из (*) следует 8; (8+3=11→ $1_{(1)}$); (8+3+1+(1)=13→ $3_{(1)}$); (8+3+1+(1)= =13→ $3_{(1)}$ (Δ=2); (3+1+(1)=5);1

Получим 153318.

Аналогично, если 2-ой сомножитель 3х, 4х и т.д. член.

Найти $\boxed{\begin{array}{r} 66666 \\ \underline{953} \\ ? \end{array}}$ если $\boxed{\begin{array}{r} 6 \\ \underline{953} \\ 5718 \end{array}}$ (*) 8; (8+1=9); (8+1+7=16→ $6_{(1)}$);(8+1+7+5+(1)=21 → $1_{(2)}$); т.к. Δ=2 8+1+7+(5)+(1)=22→ $2_{(2)}$

Затем смещаемся на 1 цифру и пошагово уменьшаем количество суммируемых цифр т.е. 1+7+5+(2)=15→ $5_{(1)}$; 7+5+(1)=13→ $3_{(1)}$; 5+(1)=6. Ответ:66666*953=63532698.

Метод 3. Способ умножения крайних цифр сомножителей (столбиком).

1) $\boxed{\begin{array}{r} 88 \\ \underline{78} \\ ? \end{array}}$ 1) 56 64 56=7*8; 64=8*8

2) $\boxed{\begin{array}{r} 56 \\ +\,56 \\ \underline{12} \\ 68 \end{array}}$ (120) $\boxed{\begin{array}{r} 64 \\ +\,64 \\ \underline{0} \\ 64 \end{array}}$ 120=56+64

Т.к Δ=0, ответ: 6864

Замечание: при распределении чисел суммы крайних сомножителей (120) между ними единицы прибавляются к десяткам правого двучлена, а остальные - к соответствующим более высоким разрядам левого.

$\boxed{\begin{array}{r} 7777 \\ \underline{26} \\ ? \end{array}}$ 1)14 42 3)20 02

2)14 (56) 42 4)20 (22) 02; то есть (22)=20+02 - средняя часть. Проверка:

$$\begin{array}{r} 14 \\ +\;5 \\ \hline 19 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 42 \\ +\;6 \\ \hline 102 \end{array}$$

26*7=182→

20 →2 (к=2=n_2) →22 - периодическая 2-ая часть

ответа:7777*26= 202202

3) $\begin{array}{r} 8888 \\ 736 \\ \hline ? \end{array}$

1) 56 48

2) $\begin{array}{r} 56 \\ +\;80 \\ \hline 640 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 48 \\ +\;72 \\ \hline 768 \end{array}$

80=(7+3)*8

72=(3+6)*8

3)640 (128) 768 128=(7+3+6)*8

$\begin{array}{r} 640 \\ +\;12 \\ \hline 652 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 768 \\ +\;8 \\ \hline 1568 \end{array}$

-1ая и 3-тья части ответа трёхчлены.

Найдём средНюю часть ответа:

4)653 568 736*8=5888→596→65→11→2

κ=4> n_2 = 3→имеем сбой→1 - число сбоя, а т.к. Δ=1, то средняя часть равна 1. В случае сбоя к 1-ой части ответа добавляется 1.

Ответ:8888*736=6541568.

(4) $\begin{array}{r} 8888 \\ 9731 \\ \hline ? \end{array}$

$\begin{array}{r} 72 \\ +\;128 \\ \hline 848 \\ +\;152 \\ \hline 8632 \\ +\;16 \\ \hline 8648 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 08 \\ +\;32 \\ \hline 328 \\ +\;88 \\ \hline 9128 \\ +\;0 \\ \hline 9128 \end{array}$

128=(9+7)*8

32=(3+1)*8

152=(9+7+3)*8

88=(7+3+1)*8

160=(9+7+3+1)*8

Ответ 8888*9731=86489128 т.к. Δ=0, - средней части нет.

Метод 4.

Способ позволяет легко находить 1-ую и 2-ую часть ответа, а, следовательно, и 3-ю часть для случаев $n_1 \geq n_2$. Для получения результата второй сомножитель умножают на цифру 1-ого, а затем результат делят на 9. Целая часть результата деления и есть 1-ая часть ответа. 1-ая цифра дробной части периодическое число 2-ой части. А 3-тья часть находится как разность 1-ой и 2-ой частей ответа. Это в том случае, если нет сбоя, если имеем сбой, то 3-я часть находится по ранее указанным правилам. Если в результате получается целое число, то первая часть ответа на единицу меньше его, а средняя часть состоит из девяток.

Примеры:

1) 7777*86=?

1)86*7=602; 2)602:9=66,88… 66<88→сбоя нет, тогда 3-ая часть 88-66=22

Ответ: 7777*86=668822

2)8888*34=? 1)272:9=30,22 22<30→средняя часть – 21(сбой) 3-ая часть: 122-30=92

Ответ: 8888*34=302192

3)4444*876=? 1)876*4=3504; 2) 3504:9=389,333…, где 333<389→ средняя часть со сбоем и так как Δ=1, среднее число 2, особое число 332, тогда 3-ая часть ответа равна 1333-389=944

Ответ: 4444*876=3892944

4)222*354=? 1)354*2=708; 2)708:9=78,66; 1-ая часть – 078, средняя часть равна 0 (Δ=0); среднее число 666, тогда 3-ая часть:666-078=588. Ответ 222*354=078588.

Некоторые частные случаи

1}Умножение 33….3 на любое число 2-го сомножителя ($n_1 \geq n_2$) является частным случаем способа (4).Здесь 1-ая часть ответа и периодическое число 2-ой части находится сразу делением 2-ого сомножителя на 3 (цифру 1-ого сомножителя). Периодическая цифра 2-ой части ответа – это первая дробная цифра при делении. Если при делении получаем целое число, то 1-ая часть ответа на единицу меньше, а периодическая цифра 2-ой части во всех таких случаях будет 9.

Примеры:

1)
$$\begin{array}{r} 3333 \\ 47 \\ \hline 156651 \end{array}$$
47*3=15,6. Периодическое число 2-ой части – 6, а т.к. Δ=2, то средняя часть ответа – 66, а 3-я: 66-15=51

2)
$$\begin{array}{r} 3333 \\ 238 \\ \hline 0793254 \end{array}$$
283:3=79,3 следовательно 1-ая часть ответа 079 (т.к. $n_2 = 3$), средняя часть – 3 (т.к. Δ=1), особое число 333, (при Δ=n_2) тогда 3-я часть 333-079=257

3)
$$\begin{array}{r} 3333 \\ 8496 \\ \hline 28317168 \end{array}$$
8496:3=2832 – целое, следовательно, 1-ая часть ответа 2831, особое число средней части 9999 (при Δ=n_2), а т.к. Δ=0, то средней части ответа нет. 3-я часть 9999-2831=7158

Замечание:

1)Умножение 1-го сомножителя из шестерок на 2-ой сомножитель ($n_1 \geq n_2$) можно заменить умножением аналогичного сомножителя из троек на удвоенный 2-ой сомножитель: 6666*28=3333*56=186648

2} Умножение 55…5 на однородные двучлены.

В этом случае ответ можно записать сразу. Здесь 3-я часть ответа – произведение крайних цифр сомножителей. Если к результату прибавить цифру 2-го сомножителя, получим 1-ую часть ответа. А средняя часть – цифры 2-ого сомножителя в количестве равная Δ.

Примеры:

55*33=1815(Δ=0); 55555*77=4277735 (Δ=3)

При умножении 55…5 на произвольный двучлен цифры п1-ой и 2-ой части ответа – это первые 4 цифры, полученные при делении двучлена на 18 (это число ответов, где первая цифра

(1,2…5 одинаковая)). Если при делении получаем целое число, например 4), то 1-ая часть ответа 40-1=39, а 2-ая состоит из 9 (или 4000-1=3999). 3-ая часть ответа – произведение последних цифр сомножителей. Если оба числа 2-ого сомножителя чётные или нечётные и к этому произведению добавляем 50, если одна из чисел 2-ого сомножителя чётная, а другая нет.

5555*49=?; 49:18=2722 27 – 1-ая часть ответа, 2 – периодическая цифра 2, но 22<27, следовательно, средняя часть 21. 3-ая часть 5*9+50=95. Ответ 272195

5555*82=?; 82:18=4555, 55>45, 55 – 2-ая часть ответа; 3-ая часть 5*2=10, т.е. 8 и 2 – четные. Ответ: 455510.

Умножение 7777 на произвольный двучлен. В этом случае сначала находим 2-ую часть ответа (обычным способом), затем 1-ю. Для этого двучлен делим на 13. Первые 2 цифры – это первая часть ответа. В случае сбоя к ней добавляют 1. 3-ая часть находится как разность 2-ого и 1-ого (с учётом особенности сбоя, если он есть).

3} Умножение сомножителей, каждый из которых состоит из произвольных, но однородных цифр, причем ($n_1 \geq n_2$).

$$\begin{array}{r} 7777 \\ 888 \\ \hline 6905976 \end{array}$$

7*8=56→5+6=(05)+(06)=11

1)5+11=(16) 2)16+11=(27)

3) 6+11=(17) 4) 17+11=(28)

Находим средний двучлен (скобку): 11*n_2=11*3=(33). Составляем ответ (05)(16) (27) (33) (28)(17)(06) →(справа налево суммируем соседние цифры с учётом индексов) →6905976

Правило:

1.Перемножаем крайние цифры сомножителей, и результат записываем двучленом (56). Если получили одночлен, то впереди добавляем 0.

2. Расписываем двучлен как сумму составляющих цифр (7*8=56 → 5+6 =(05)+(06)=11)

3.К каждому слагаемому прибавляем результат их сложения (11), а к результату еще раз прибавляем (11) и так (n_2 -1) раз. В нашем случае получаем результаты (16);(27) и (17);(28) т.к. n_2-1=3-1=2 т.е. выполнили 2 шага.

4.Находим величину и количество средних двучленов (скобок). Их количество равно Δ, а величина находится умножением среднего двучлена на n_2 т.е. 11*3=(33).

5.Результат выписываем в виде последовательности двучленов (скобок 1,2,4,3), расположенных симметрично относительно центра (при Δ=0) или средних двучленов(2,4); (во всех случаях, где появляется одночлен, впереди добавляем 0 т.е. 5=(05)).

А далее пошаговым суммированием справа налево получаем ответ.

4} Нахождение произведения 1-го сомножителя на двучлены, (трехчлены,..,) состоящих из различных цифр, которые могут находиться в ротации, если известно произведение какого-либо одного из них.

Примеры: умножение на 2-х член.

1) Найти 7777*74, если 7777*47=365519

Решение: 1). Находим разность вторых сомножителей 74-47=27. 2) 27:9=3; 3) 3*7=21 (7-цифра 1-го сомножителя). Т.к. 74 > 47, то к 1-ой части ответа прибавляем, а от 3-ей – отнимаем 21. Получаем ответ

$$\begin{array}{r} 365519 \\ +21\ \ \ -21 \\ \hline 575598 \end{array}$$

т.е. 7777*74=575598

Если известно произведение на больший сомножитель, а на меньший требуется найти, то результат указанных действий (21) от 1-ой части ответа отнимают, а к 3-ей прибавляют.

Замечание: если второй сомножитель двучлен, то действие 1) и 2) можно заменить положительной разностью цифр 2-ого сомножителя 7-4=3.

Пример: Найти 6666*17, если 6666*71=473286

Решение: 1) 7-1=6; 2)6*6=36; 3)т.к. 17<71, то

$$\begin{array}{r} 473286 \\ -36\ \ \ +36 \\ \hline 113322 \end{array}$$

Т.е 6666*17=113322

Пример умножение на 3-х член

Пусть 4444*768=3412992. При ротации цифр 2-го сомножителя имеем 6 вариантов:

768,678, 876, 786, 687, 867, т.е. 3!=1*2*3=6. Произведение на любой из них находится аналогично. Найдем, например 4444*786=?

Решение: 1) 786-768=18; 2) 18:9=2; 3)2*4=8. Т.к. 786>768, то

$$\begin{array}{r} 3412992 \\ +8\ \ \ -8 \\ \hline 349\ 984 \end{array}$$

Т.е. 4444*786+3492984

Умножение на 4-х-значные числа аналогично при условии $n_1 \geq n_2$.

Замечание: при умножении 11, 111… на двучлены, сумма цифр которых простое число 1-го порядка, ответы различаются только переменой мест крайних цифр

Примеры: 11*25=275: 11*52=572; 111*25=2775; 111*52=5772

Список литературы

1.Тихонов Д.А., Селиверстова И.Ф. Занимательная арифметика// Международный студенческий научный вестник. – 2018. –№ 5 URL: https://eduherald.ru/ru/article/view?id=18931