МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ФИНАНСОВО – ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СФЕРЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ НЕЧЕТКИХ МАТРИЧНЫХ ИГР 2×2

Мойса Е.В., Барышевский С.О.
Мелитопольский институт государственного и муниципального управления «Классического приватного университета», Мелитополь, Украина

MATHEMATICAL MODELING IN THE FINANCIAL AND ECONOMIC SPHERE USING THE GRAPHIC METHOD OF SOLVING FUZZY MATRIX GAMES 2 × 2

Moisa E.V., Baryshevskyi S.O.
Melitopol institute of public and municipal administration of the “Classical private university”, Melitopol, Ukraine

Во многих задачах финансово – экономической сферы могут быть полезны методы теории игр. В частности, эти методы применяются в условиях неопределенности и риска, когда поведение противоположной стороны (необязательно враждебное) просто неизвестно или известно нечетко [1]. Любая конечная матричная игра может быть решена графически (графоаналитически), либо ее решение может быть сведено к решению пары двойственных задач линейного программирования [2]. Однако в случае матричных игр, в которых элементы платежной матрицы представляют собой нечеткие числа, возникает проблема с использованием для решения таких игр симплекс – метода, связанная с делением на нечеткие числа, носитель которых содержит нуль. Эта операция над нечеткими числами не определена [3]. Графический метод применим только для игр, в которых хотя бы у одного из игроков имеется две стратегии. Однако он хорошо иллюстрирует содержательную сторону процесса поиска решения в игре и графически наглядно поясняет основные понятия теории матричных игр. В случае решения нечетких матричных игр графическим методом проблем проведения операций над нечеткими числами в основном не возникает. Неопределенность при решении нечетких матричных игр графическим методом может быть описана с использованием математического аппарата теории нечетких множеств и нечеткой геометрии [4–6].

В данной работе предлагается рассмотрение графического метода решения нечетких матричных игр 2×2 в финансово – экономической сфере с использованием аппарата нечеткой математики и нечеткой геометрии. Основные понятия теории нечетких множеств, нечетких соответствий и отношений, понятия нечетких геометрических объектов и нечетких геометрических фигур на плоскости будем полагать такими же, как и в [4–8].

Графический метод вполне применим для нечетких матричных игр размерностью $2 \times n$ или $m \times 2$, которые в свою очередь могут быть сведены к игре 2×2.

Рассмотрим случай, когда задана игра размерностью 2×2 с платежной матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Пусть элементы матрицы А – гауссовы нечеткие числа с функциями принадлежности: $\mu(a_{ij}) = exp\left\{-\frac{(a_{ij}-a_{ij}^0)^2}{2\sigma_{ij}^2}\right\}$, где a_{ij}^0 – модальное значение (ядра) нечетких чисел, a_{ij}, σ_{ij} – коэффициенты концентрации.

Пусть (x_1, x_2) нечеткие оптимальные стратегии игрока 1, (y_1, y_2) – нечеткие оптимальные стратегии игрока 2. Тогда исключая тривиальный случай (наличие нечеткой чистой оптимальной стратегии хотя бы у одного из игроков), имеем:

$$x_1 + x_2 = 1,\ x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ y_1 + y_2 = 1,\ y_1 > 0,\ y_2 > 0. \quad (1)$$

Далее, для удобства, нечеткие точки, нечеткие прямые и нечеткие отрезки будем изображать графически их модальными значениями (ядрами), а их размытость (нечеткость) – крайними численными значениями коэффициентов концентрации.

Выберем прямоугольную систему координат и отложим на оси абсцисс единичный отрезок для представления нечетких смешанных стратегий игрока 1 (рис. 1). На концах этого отрезка поставим два перпендикуляра, на которых будем откладывать нечеткие выигрыши игрока, когда он использует нечеткие чистые стратегии A_1 и A_2.

Пусть игрок 2 выбрал нечеткую стратегию B_1. Тогда при использовании игроком 1 нечеткой стратегии A_2 он получает нечеткий выигрыш a_{21} (соответствующая нечеткая точка на левом перпендикуляре), а при использовании нечеткой чистой стратегии A_1 – нечеткий выигрыш a_{11} (нечеткая точка на правом перпендикуляре). Соединив эти две нечеткие точки нечетким отрезком нечеткой прямой, мы получим график смешанной стратегии x при условии, что игрок 2 использует нечеткую чистую стратегию B_1 (рис. 1). Точно такие же нечеткие прямые можно построить для B_2.

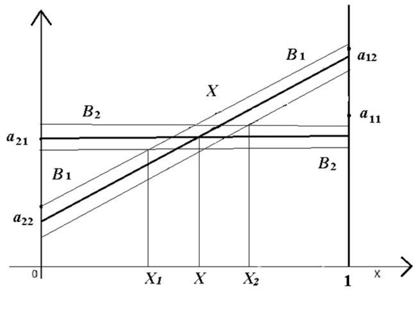

Рис. 1. График зависимости нечеткого выигрыша игрока 1 от смешанной стратегии

Нечеткая ломанная B_1XB_2 является нечеткой нижней границей выигрыша (рис. 1) получаемого игроком 1. Нечеткая точка X в которой он максимален, определяет нечеткую цену игры и ее решение. Аналогично можно найти нечеткую оптимальную смешанную стратегию игрока 2 и нечеткую нижнюю цену игры. Согласно основной теореме матричных игр решение в нечетких смешанных стратегиях существует всегда и $x = \gamma = v$. Здесь v – нечеткая цена игры.

Рассмотрим использование исследуемого метода в нечетких матричных играх 2×2 на примере задач из финансово-экономической сферы.

Пример. Банк A заинтересован в покупке акций некоего акционерного общества B. Стремясь сделать покупку как можно выгодной, банк снабжает продавца информацией о реальной стоимости акций, которая может быть как нечетко правдивой A_1, так и нечетко ложной A_2. Продавец может как поверить информации B_1, так и не поверить B_2 с некоторой степенью истинности соответственно. Пусть в качестве платежа используется нечеткий прирост стоимости по отношению к вложенным средствам, и нечеткая платежная матрица имеет вид:

$A = \begin{pmatrix} \widetilde{0.6} & \widetilde{0.9} \\ \widetilde{0.9} & \widetilde{0.5} \end{pmatrix}$, где $\widetilde{0.6}, \widetilde{0.9}$ и $\widetilde{0.5}$ – нечеткие гауссовы числа с следующими функциями принадлежности соответственно:

$$\mu(\widetilde{0{,}6}) = exp\left\{-\frac{(x-0.6)^2}{2\cdot(0.1)^2}\right\}; \mu(\widetilde{0{,}9}) = exp\left\{-\frac{(x-0.9)^2}{2\cdot(0.2)^2}\right\}; \mu(\widetilde{0{,}5}) = exp\left\{-\frac{(x-0.5)^2}{2\cdot(0.1)^2}\right\}.$$

Определить нечеткие оптимальные стратегии игроков A и B, а также нечеткую цену игры графическим методом.

Решение. Нечеткая нижняя цена игры: $\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i(\min_j(\alpha - a)_{ij}) = \max(\widetilde{0{,}6}, \widetilde{0{,}5}) = \widetilde{0{,}6}$; нечеткая верхняя цена игры: $\beta = \min_j \beta_j = \min_j(\max_i a_{ij}) = \min(\widetilde{0{,}9}, \widetilde{0{,}9}) = \widetilde{0{,}9}$; $\alpha \neq \beta$; нечеткая цена игры: $\widetilde{0{,}6} \leq v \leq \widetilde{0{,}9}$. Игра не имеет седловой точки. Оптимальное решение следует искать в области смешанных стратегий.

Построим на плоскости отрезки, соответствующие стратегии игрока 2 (рис. 2.а.) и игрока 1 (рис. 2.б.).

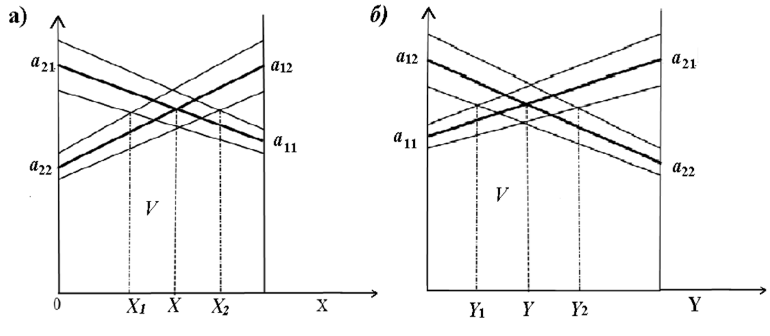

Рис. 2. Геометрическая интерпретация задачи при стратегиях игрока 2 (а) и при стратегиях игрока 1 (б).

Построив проекции нечетких точек пересечения нечетких отрезков на соответствующие оси системы координат, находим нечеткие оптимальные стратегии и нечеткую цену игры x_1, x_2, y_1, y_2 и v с соответствующими функциями принадлежности:

$$\mu(x_1) = exp\left\{-\frac{(x_1-0.6)^2}{2\cdot(0.2)^2}\right\}; \mu(x_2) = exp\left\{-\frac{(x_2-0.4)^2}{2\cdot(0.2)^2}\right\};$$

$$\mu(y_1) = exp\left\{-\frac{(y_1-0.4)^2}{2\cdot(0.2)^2}\right\}; \mu(y_2) = exp\left\{-\frac{(y_2-0.6)^2}{2\cdot(0.2)^2}\right\}; \mu(v) = exp\left\{-\frac{(v-0.7)^2}{2\cdot(0.2)^2}\right\}.$$

Выводы. В данной работе предлагается рассмотрение графического метода решения матричных игр 2×2, в которых элементы матрицы – гауссовы нечеткие числа. Рассмотрено использование исследуемого метода в играх 2×2 на примере численного решения задач из финансово-экономической сферы.

Список литературы.

1) Абланская Л.В. Экономико – математическое моделирование: учебник / под. общ. ред. И.И. Дрогобыцкого. – 2-е изд. стереотип. – М.: Издательство “Экзамен”, 2006. – 798 с.

2) Василевич Л.Ф. Теория игр. Уч. Пособие – К.: КННМ, 2000. – 98 с.

3) Зайченко Ю.П. Исследование операций: нечеткая оптимизация. – К.: Вища школа, 1991. – 191 с.

4) Раскин Л.Г. Серая О.В. Нечеткая математика. Основы теории. Приложения. – Х.: Парус, 2008. – 352 с.

5) Новак В. Мочкорж И. Математиеские принципы нечеткой логики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 352 с.

6) Баришевський С.О. Никифорова Л.Є. Караєв О.Г. Аксіоматичні основи евклідової нечіткої планіметрії // Вісник Херсон: ХНТУ, 2014. – Вип. 3(50). – С. 559-561.

7) Барышевский С.О. Графоаналитический метод решения нечетких матричных игр // Сучасні проблеми моделювання: зб. Наук. Праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького; гол. Ред. кол. А.В. Найдиш. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2016. – Вип. 5. – С. 3-8.

8) Серая О.В. Каткова Т.И. задача теории игр с нечеткой платежной матрицей // Математичні машини і системи. – 2012. №2. – С. 29-36.