АКСИОМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Элисов Р.П., Барышевский С.О.
Мелитопольский институт государственного и муниципального управления «Классического приватного университета», Мелитополь, Украина

AXIOMATIC BASES OF THE THEORY OF FUZZY NATURAL NUMBERS

Elisov R.P., Baryshevskyi S.O.
Melitopol institute of public and municipal administration of the "Classical private university", Melitopol, Ukraine

В нечеткой математике [1] изучаются объекты самых разных типов, например, нечеткие точки, нечеткие числа, нечеткие функции. Эти объекты, или элементы, на основании некоторых свойств, которые описываются функциями принадлежности, объединяются в нечеткие совокупности, или нечеткие множества. Каждая из существующих теорий занимается изучением некоторой совокупности, или основным множеством теорий.

В нечеткой арифметике основным элементом является нечеткое натуральное число, а основным множеством – нечеткое множество $\widetilde{N}$ – нечетких натуральных чисел. Это множество $\widetilde{N}$ может быть построено с помощью системы аксиом, которая является аналогичной системе аксиом Пеано в четкой арифметике с использованием аппарата нечеткой логики и теории нечетких множеств [1–7].

Нечеткое множество можно рассматривать как объединение его составляющих – одноточечных нечетких множеств (ОНМ), носители которых состоят из единой точки. Нечеткие множества, элементы которых – нечеткие числа, представлены в виде ОНМ, будем называть точечными нечеткими множествами (ТНМ) [4–6].

В работе [4], предлагается рассмотрение аксиоматического построения точечного нечеткого множества натуральных чисел, как основы теории точечных нечетких множеств. По нашему мнению, представляет интерес к рассмотрению аксиоматического построения теории нечетких натуральных чисел, которые представляют собой определенное объединение одноточечных нечетких натуральных чисел [4–6].

В данной работе мы предлагаем рассмотрение аксиоматического построения теории нечетких натуральных чисел как основы нечеткой арифметики.

Основные понятия теории нечетких множеств, элементов нечеткой логики, нечетких соотношений и нечетких отношений будем рассматривать как в [1–7]. Пусть заданы нечеткие множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ в X. Введем понятие степени включения $\nu(\tilde{A},\tilde{B})$ нечеткого множества $\tilde{A}$ в нечеткое множество $\tilde{B}$, которое находится по формуле: $\nu(\tilde{A},\tilde{B}) =$

$\underset{x\in X}{\wedge}\big(\mu_A(x) \to \mu_B(x)\big)$, где величины $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ понимаются как нечетко высказываемые переменные, а $\underset{x\in X}{\wedge}$ – операция конъюнкции, которая берется по всем $x \in X$. Аналогичным образом можно определить и степень включения $\nu(\tilde{B},\tilde{A})$ нечеткого множества $\tilde{B}$ в множество $\tilde{A}$. Если $\nu(\tilde{A},\tilde{B}) \geq 0{,}5$, то будем считать, что множество $\tilde{A}$ нечетко включается в множество $\tilde{B}$ и обозначается $\tilde{A} \tilde{\subseteq} \tilde{B}$. Если $\nu(\tilde{A},\tilde{B}) \leq 0{,}5$, то считаем, что множество $\tilde{A}$ нечетко не включается в множество $\tilde{B}$ и обозначается $\tilde{A} \tilde{\not\subseteq} \tilde{B}$. Легко увидеть, что рассмотренное понятие нечеткого включения нечетких множеств является обобщением понятия включения четких множеств. Подчеркнем, что степень включения одного нечеткого множества в другое может быть определена для любых двух нечетких множеств. При этом она может принимать любое значение в пределах от 0 до 1.

Определим степень равенства $\mu\big(\tilde{A},\tilde{B}\big)$ нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ выражением: $\mu\big(\tilde{A},\tilde{B}\big) = \underset{x\in X}{\wedge}\big(\mu_A(x) \leftrightarrow \mu_B(x)\big)$. Если $\mu\big(\tilde{A},\tilde{B}\big) \geq 0{,}5$, то будем считать, что множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ нечетко равные, и определяются $\tilde{A} \approx \tilde{B}$. Если $\mu\big(\tilde{A},\tilde{B}\big) \leq 0{,}5$, то считаем, что множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ нечетко не равные, и определяются выражением $\tilde{A} \tilde{\neq} \tilde{B}$. В случае, когда $\mu\big(\tilde{A},\tilde{B}\big) = 0{,}5$, множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ одновременно нечетко равные и нечетко не равные. Эти множества называют взаимно индифферентными и обозначают $\tilde{A}{\sim}\tilde{B}$. Понятно, что рассмотренное понятие степени равности двух нечетких множеств является обобщением понятия равности четких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, поскольку в случае $A = B$ имеем $\mu(A,B) = 1$, а при $A \neq B$ получим $\mu(A,B) = 0$. Если $\tilde{A} \tilde{\not\subseteq} \tilde{B}$ и $\tilde{A} \tilde{\neq} \tilde{B}$, то будем считать, что $\tilde{A}$ нечетко строго включается в множество $\tilde{B}$.

Легко показать, что $\mu\big(\tilde{A},\tilde{B}\big) = \nu(\tilde{A},\tilde{B}) \wedge \nu(\tilde{B},\tilde{A})$, то есть степень равенства нечетких множеств определяется как минимум из их степеней включения. Если $\mu\big(\tilde{A},\tilde{B}\big) \geq 0{,}5$, то есть множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ нечетко равные, то $\nu(\tilde{A},\tilde{B}) \geq 0{,}5$ и $\nu(\tilde{B},\tilde{A}) \geq 0{,}5$. Так что, множество $\tilde{A}$ нечетко включается в множество $\tilde{B}$ и наоборот. От сюда следует метод доказательства нечеткого равенства двух и более нечетких множеств, основанный на доказательстве взаимного нечеткого включения.

Нечетким отношением на произвольном непустом множестве X называется и через $\tilde{\varphi} = (X,\tilde{F})$ обозначается пара множеств, в котором $\tilde{F}$ является нечетким множеством в X^2.

Пусть дано произвольное нечеткое отношение $\tilde{\varphi} = (X,\tilde{F})$.

Степенью рефлективности $\alpha(\tilde{\varphi})ref$ называется величина, которая определяется выражением $\alpha(\tilde{\varphi})ref = \underset{x\in X}{\wedge}\mu_f < x,x >$.

Отношение $\tilde{\varphi}$ называется нечетко рефлексивным, если $\alpha(\tilde{\varphi})ref \geq 0{,}5$. Отношение $\tilde{\varphi}$ называется нечетко нерефлексивным, если $\alpha(\tilde{\varphi})ref \leq 0{,}5$. Если $\alpha(\tilde{\varphi})ref = 0{,}5$, то отношение $\tilde{\varphi}$ называется рефлексивно индифферентным.

Степенью антирефлективности $\beta(\tilde{\varphi})ref$ называется величина, которая определяется следующим выражением $\beta(\tilde{\varphi})ref = \neg(\bigwedge_{x\in X} \mu_f < x, x >)$.

Отношение $\tilde{\varphi}$ называется нечетко антирефлексивным, если $\beta(\tilde{\varphi})ref \geq 0{,}5$ и нечетко неантирефлексивным, если $\beta(\tilde{\varphi})ref \leq 0{,}5$. В случае, когда $\beta(\tilde{\varphi})ref = 0{,}5$, то отношение $\tilde{\varphi}$ антирефлексивно индифферентно.

Степенью симметричности $\alpha(\tilde{\varphi})sym$ называется величина $\alpha(\tilde{\varphi})sym = \bigwedge_{x,y\in X}(\mu_F < x, y > \leftrightarrow \mu_F < y, x >)$.

Отношение $\tilde{\varphi}$ называется нечетко симметричным, если $\alpha(\tilde{\varphi})sym \geq 0{,}5$. Отношение $\tilde{\varphi}$ называется нечетко не симметричным, если $\alpha(\tilde{\varphi})sym \leq 0{,}5$. Если $\alpha(\tilde{\varphi})ref = 0{,}5$, то отношение $\tilde{\varphi}$ называется симметрично индифферентным.

Степенью антисимметричности $\beta(\tilde{\varphi})sym$ называется величина $\beta(\tilde{\varphi})sym = \bigwedge_{x,y\in X}(\mu_F < x, y > \wedge\, \mu_F < y, x >)$.

Отношение $\tilde{\varphi}$ называется нечетко антисимметричным, если $\beta(\tilde{\varphi})sym \geq 0{,}5$ и нечетко не антисимметричным, если $\beta(\tilde{\varphi})sym \leq 0{,}5$. В случае, когда $\beta(\tilde{\varphi})ref = 0{,}5$, то отношение $\tilde{\varphi}$ называется антисимметрично индифферентным.

Степенью транзитивности $\alpha(\tilde{\varphi})tr$ отношения $\tilde{\varphi}$ называется величина $\alpha(\tilde{\varphi})tr = \bigwedge_{x,y.z\in X}((\bigvee_{y}(\mu_F < x, y > \wedge\, \mu_F < y, z >)) \rightarrow \mu_1 =< x, z >)$.

Отношение $\tilde{\varphi}$ называется нечетко транзитивным, если $\alpha(\tilde{\varphi})tr \geq 0{,}5$ и нечетко не транзитивным, если $\alpha(\tilde{\varphi})tr \leq 0{,}5$. В случае, когда $\alpha(\tilde{\varphi})tr = 0{,}5$, то отношение $\tilde{\varphi}$ называется транзитивно индифферентным.

Отношение $\tilde{\delta} = (X, \tilde{F})$ будем называть отношением нечеткого строгого порядка, если оно нечетко антирефлексивно, нечетко антисимметрично и нечетко транзитивно. Другими словами, отношение $\tilde{\delta}$ является нечетким строгим порядком, если величина $\pi(\tilde{\delta}) = \beta(\tilde{\delta})ref \wedge \beta(\tilde{\delta})sym \wedge \alpha(\tilde{\delta})tr$, которая называется степенью строгого порядка отношения $(\tilde{\delta})$, больше или равна 0,5. Если $\pi(\tilde{\delta}) \leq 0{,}5$ то $\tilde{\delta}$ не является нечетким строгим порядком. В случае, когда $\pi(\tilde{\delta}) = 0{,}5$, то отношение $\tilde{\delta}$ будем называть индифферентным относительно строгого порядка.

Пусть $\tilde{\delta} = (X, \tilde{F})$ – нечеткий строгий порядок на множестве *X*. Если $(\mu_F < x, y >) \geq 0{,}5$, тогда говорят, что элементы $x, y \in X$ связаны отношением нечеткого строгого порядка и элемент *x* нечетко предшествует элементу *y*.

Теперь нечеткое множество $\widetilde{N}$ – нечетких натуральных чисел, может быть построена с помощью следующей системы аксиом:

I. Нечеткий ноль – нечеткое натуральное число.

II. Всякому нечеткому натуральному числу x нечетко соответствует единое другое нечеткое натуральное число, которое называется нечетко следующим за x и обозначается x+.

III. Нечеткое число, нечетко следующее за нечетким натуральным, нечетко отличается от нуля.

IV. Нечетко отличимым натуральным числам нечетко соответствуют нечетко отличимые следующие.

V. (Аксиома индукции). Пусть множество $\tilde{A}$, которое содержит нечеткий ноль, нечетко включено в множество $\widetilde{N}$ и является таким, что если $\tilde{A}$ содержит x, то $\tilde{A}$ содержит x+. Тогда $\tilde{A}$ нечетко совпадает с множеством $\widetilde{N}$.

Выводы. В данной работе рассмотрено применение для аксиоматического построения множества нечетких натуральных чисел нечеткой логики и теории нечетких множеств. Особое внимание приделяется рассмотрению элементов нечеткой логики, нечеткого включения, нечеткого равенства, нечеткого отношения и его основных свойств в пространстве нечетких множеств.

Список литературы.

1) Раскин Л.Г., Серая О.В. Нечеткая математика. Основы теории. Приложения. – Х.: Парус, 2008. – 352 с.
2) Берштейн Л.С., Боженюк А.В. Нечеткие графы и гиперграфы. – М.: Научный мир, 2005. – 256 с.
3) Новак В., Перфильева И., Мочкорж И. / пер. с англ.: под ред. Аверкина А.Н. – М.: Физматлит, 2006. – 352 с.
4) Баришевський С.О. Основи теорії точкових нечітких множин // Праці: Таврійський державний агротехнологічний університет. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – Вип. 4. – Т. 52. – С. 141–144.
5) Баришевський С.О. Основи теорії точкових нечітких множин: алгебраїчні та топологічні аспекти // Праці: Таврійський державний агротехнологічний університет – Мелітополь: ТДАТУ, 2013. – Вип.4. – Т. 57. С.22 – 27.
6) Барышевский С.О. Развитие понятия однородного нечеткого натурального числа. // Сборник: Современные проблемы науки и образования. - 2018. – №1 – С. 68-69.
7) Баришевський С.О. Элементы теории нечетких множеств и развитие понятия нечетких систем. Международный журнал экспериментального образования. – 2015. - № 10 (часть 1) – С. 39-40.