ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КООПЕРАТИВНЫХ ИГР В ИНСТИТУЦИОНАЛЬНОЙ ЭКОНОМИКЕ.

Вершков И.В., Мурадари А.Э. Барышевский С.О.

Мелитопольский институт государственного и муниципального управления «Классического приватного университета», Мелитополь, Украина

GRAPHIC ANALYTICAL METHOD OF SOLVING COOPERATIVE GAMES IN THE INSTITUTIONAL ECONOMY.

Vershcov I. V., Muradari A.E Baryshevskyi S.O.

Melitopol institute of public and municipal administration of the “Classical private university”, Melitopol, Ukraine

В настоящее время математические модели на основе теории игр применяются все к большему кругу экономических задач. Формальные модели в институциональной экономике также могут строится с помощью теории игр [1–3]. Сторонники игрового подхода к исследованию института рассматривают институт как правила некой игры, которую один участник взаимоотношений ведет с другими участниками. Эти правила игры состоят из формальных писаных правил и неписаных кодексов поведения, которые лежат глубже формальных и дополняющих их. При этом действует определенный механизм, принуждающий игроков к соблюдению правил игры. Именно наличием такого механизма сторонники игрового подхода и объясняют существование института как правила. Для упрощения анализа взаимодействий между субъектами, обычно рассматривают игру с двумя участниками [3].

Классической задачей теории игр с двумя участниками является “Дилемма заключенных”, ситуация, часто используемая для моделирования взаимодействий в экономике соглашений, в частности, взаимодействий на рынке [1;4].

Целью данной статьи является рассмотрение графоаналитического метода решения задач теории игр в институциональной экономике и применения этого метода для решения и анализа классической задачи теории игр 2×2 “Дилемма заключенных” в кооперативном варианте.

В практике часто встречаются конфликтные ситуации. Игра – это упрощенная модель конфликта. В отличии от конфликта игра ведется по четким правилам. Простейшим примером конфликтной ситуации является игра с нулевой суммой или антагонистическая игра, ситуация, когда интересы игроков противоположны. В случае, когда интересы игроков не противоположны, возможны различные варианты в зависимости от того, кооперируются ли игроки (кооперативные игры) или действуют каждый сам по себе (некооперативные игры) [4–5].

В случае, когда интересы игроков не являются противоположными у каждого игрока, будет своя платежная матрица. Поэтому игра называется биматричной [5]. Мы ограничимся рассмотрением биматричных игр 2×2 в кооперативном варианте.

Обсудим подходы к анализу биматричных игр в кооперативном варианте. Мы ограничимся рассмотрением биматричных игр 2×2, то есть у каждого игрока всего 2 стратегии.

Рассмотрим биматричную игру, в которой выигрыши первого и второго игроков заданы матрицами $A = (a_{ij}) \in R^{2\times 2}$ и $B = (b_{ij}) \in R^{2\times 2}$.

Пусть $p - (p_1, p_2)$ и $q - (q_2, q_2)$ – смешанные стратегии игроков. Так как $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 = 1, q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, q_1 + q_2 = 1$, то множество всех возможных вариантов пар выигрышей:

$$(M_1(p,q), M_2(p,q)) = \left(\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij} p_i q_j , \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} b_{ij} p_i q_j \right)$$ представляет собой выпуклую оболочку точек плоскости с координатами (a_{ij}, b_{ij}), i=1,2, j=1,2. При этом точки (a_{ij}, b_{ij}) соответствуют парам выигрышей игроков в случае выбора ими своих чистых стратегий.

Если при переходе от первой точки $(M_1^{'}, M_2^{'})$ ко второй (M_1^{*}, M_2^{*}) выигрыш каждого из игроков не уменьшится и при этом хотя бы у одного из игроков выигрыш увеличится, то точка $(M_1^{'}, M_2^{'})$ доминирует точку (M_1^{*}, M_2^{*}), если

$$\begin{cases} M_1^{'} > M_1^{*} \\ M_2^{'} \geq M_2^{*} \end{cases} \text{или} \begin{cases} M_1^{'} \geq M_2^{*} \\ M_2^{'} > M_1^{*} \end{cases}.$$

Множество точек, оптимальных по Парето, то есть не доминируемых другими, описываются следующим образом [4]:

$$T = \{(p^* q^*) | p^* \in S_1, q^* \in S_2, (\forall p \in S_1) M_1(p^*, q^*) \geq M_1(p, q^*) (\forall q \in S_2) M_2(p^*, q^*) \geq M_2(p, q^*)\}.$$

Множество точек, оптимальных по Парето, можно судить до переговорного множества путем выбора из множества Парето тех точек, в которых выигрыш первого и второго игроков окажутся не меньше их максимальных выигрышей α и β :

$$V = \{(p^*, q^*) \in T | M_1(p^*, q^*) \geq \alpha, M_2(p^*, q^*) > \beta\}.$$

Игрокам, естественно, имеет смысл, выбрать свои оптимальные стратегии, соответствующие точкам из переговорного множества.

Самым простым из различных способов достижения игроками договоренности о совместном выборе точки из переговорного множества является выбор чистых стратегий, приносящий игрокам наибольший суммарный доход, из которого один из игроков платит другому оговоренную сумму. Этот способ, конечно же, предполагает полностью доверительные отношения между игроками.

Если же договорится о выборе точки из переговорного множества игрокам не удается, то можно предложить им применить одну из так называемых арбитражных схем. Например, арбитражная схема Нэша предлагает игрокам выбрать из переговорного множества решение Нэша – такую пару смешанных стратегий, которая доставляет максимум функции Нэша, равной произведению превышений выигрышей игроков над гарантированными (минимальными) выигрышами.

Реализация алгоритма Нэша предполагает следующие решение задачи математического программирования [4]:

$$\begin{cases} N = (M_1(p,q)-\alpha)(M_2(p,q)-\beta) \to max, \\ (p,q) \in V. \end{cases} \qquad (1)$$

Целевая функция задачи (1) называется функцией Нэша, а оптимальное решение задачи – решением Нэша.

Для решения задачи (1) справедлива теорема: решение задачи (1) всегда существует, и если в переговорном множестве V есть хотя бы одна точка $(p,q) \in V$, такая, что $M_1(p,q) > \alpha, M_2(p,q) > \beta$, то решение задачи (1) единственно [4].

Пример. Игра “Дилемма заключенных” в кооперативном варианте.

Двое преступников (первый и второй игроки), подозреваемые в совместном совершении тяжкого преступления, находятся изолированно друг от друга в предварительном заключении. Прямые улики у следствия отсутствуют, поэтому успех обвинения зависит от того, признаются ли заключенные. У каждого из заключенных есть две стратегии: признаться (первая стратегия) или не признаваться (вторая стратегия). Если оба преступника признаются, то они будут признаны виновными и приговорены к восьми годам заключения. Если ни один из них не признается, то по обвинению в основном преступлении они будут оправданы, но суд все-таки признает их вину в менее значительном преступлении (например, в ношении оружия), в результате чего оба будут приговорены к одному году заключения. Если же признается только один из них, то признавшийся будет освобожден (за помощь следствию), а другой преступник – приговорен к максимальному сроку заключения, равному десяти годам [4, с.452].

Решение. Матрицы выигрышей игроков таковы:

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -10 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим решение данной игры при условии, что заключенные могут обмениваться информацией. Решение задачи (1) графоаналитическим методом, при анализе экономических задач, обычно проводят в первом квадранте декартовой системы координат. Число С, которое необходимо прибавить ко всем элементам матрицы A и B, при таком переходе, должно быть не меньше 10. Пусть $C = 10$. Тогда матрицы игры примут вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}.$$

Множество всех возможных пар выигрышей игроков, представлено четырехугольником ABCD на рис. 1. Очевидно, что множество Парето соответствует ломаной BCD, а переговорное множество – ломаной ECF.

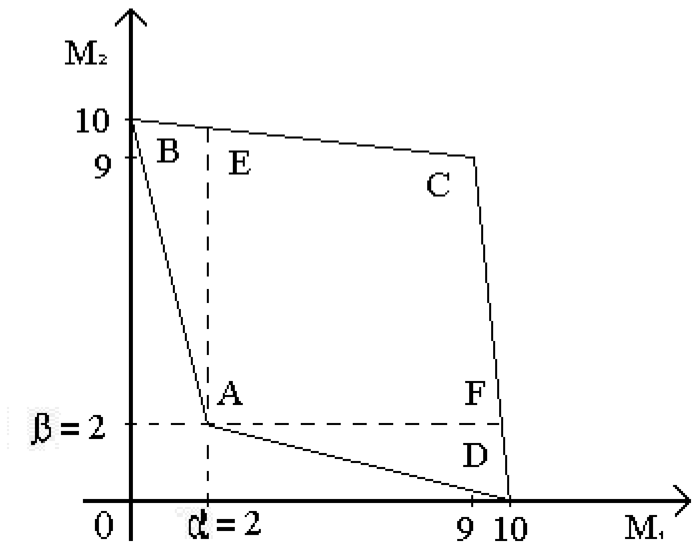

Рис. 1. Множество ожидаемых выигрышей, множество Парето и переговорное множество в кооперативном варианте игры “Дилемма заключенных”.

Прямая, проходящая через точки $B(0,10)$ и $C(9,9)$, задается уравнением $M_2 = \dfrac{-M_1 + 90}{9}$, а прямая, проходящая через точки $C(9,9)$ и $D(10,0)$ – уравнением $M_2 = -9M_1 + 90$, поэтому функция Нэша

$$N(M_1, M_2) = (M_1 - 2)(M_2 - 2) = \begin{cases} (M_1 - 2)\left(\dfrac{-M_1 + 90}{9} - 2\right), M_1 \in [2,9], \\ (M_1 - 2)((-9M_1 + 90) - 2), M_1 \in \left[9, 9\frac{7}{9}\right], \end{cases} = = \begin{cases} \dfrac{-M_1^2 + 74M_1 - 14}{9} \\ -9M_1^2 + 106M_1 - 17 \end{cases}$$

Функцию Нэша мы рассматриваем на переговорном множестве, т.е. на ломаной ECF, при этом отрезок EC задается уравнением $M_2 = \dfrac{-M_1 + 90}{9}$ при $M_1 \in [2,9]$, а отрезок CF – уравнением $M_2 = -9M_1 + 90$ при $M_2 = -9M_1 + 90 \in [2,9]$ или, что эквивалентно, при $M_1 \in \left[9, 9\frac{7}{9}\right]$.

Максимум функции Нэша на переговорном множестве достигается в точке $M_1^* = 9$ или $M_1^* = 9 - C = -1$ (график функции Нэша представлен на рис. 2).

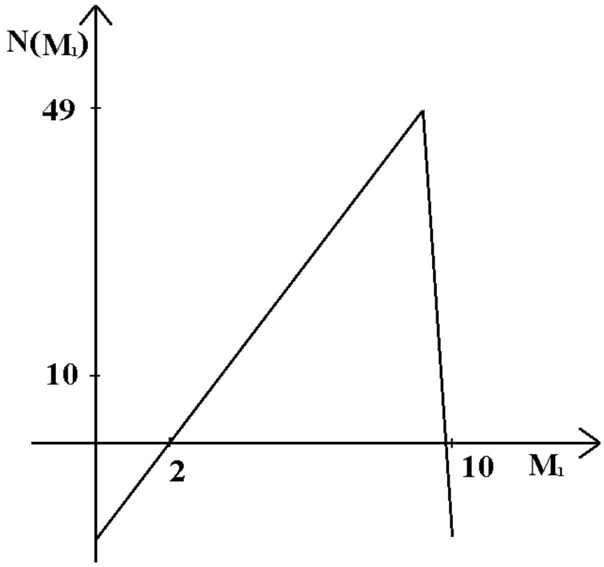

Рис. 2. График функции Нэша в кооперативном варианте игры “Дилемма заключенных”.

При этом $M_2^* = -9M_1^* + 90 = 9$ или $M_2^* = 9 - C = -1$. На рис. 1 решение Нэша соответствует точке С. Поэтому если заключенные имеют возможность переговариваться, то они могут договориться оба не признаваться, и тогда получают всего по одному году заключения.

Список литературы.

1. Олейник А.Н. Институциональная экономика: Учебное пособие. – М.: ИНФРА – М, 2007. – 416 с.

2. Прохорова О.Н., Пчелин В.Ю. Некоторые аспекты применения теории игр в институциональной экономике // Ученые записки петрозаводского государственного университета. Экономические науки. – 2015. – №1. – С. 95 – 101.

3. Захарова М.Ю. Теории игр в институциональной экономике // Научно – практический электронный журнал “Аллея Науки”. – Выпуск №6 (Февраль 2017). – С. 256 – 258.

4. Математические методы и модели исследования операций: учебник для студентов вузов. / под ред. В.А. Колемаева. – М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2018. – 592 с.

5. Просветов Т.И. Математические методы и модели в экономике: задачи и решения. Учебно – практическое пособие. – М.: Издательство “Альфа – Пресс”, 2008. – 348 с.