УДК 681.5

Методы параметрической идентификации линейных объектов

Алпатов Д.А.

Научный руководитель: Астапов В.Н.

«Самарский государственный технический университет», Самара, Россия.

Аннотация

В современной теории автоматического управления каждая модель системы подлежит идентификации. Ее задача сводится к определению математической модели объекта управления, преобразующего его входные воздействие в выходные величины. В качестве систематических моделей объектов могут использоваться структурные схемы, алгебраические, дифференциальные уравнения, Марковские цепи, и еще большое множество примеров. Соответственно, для каждого вида математической модели должен быть применим определенный тип идентификации. В настоящее время наибольшее распространение при идентификации линейных объектов получили следующие методы: метод ошибок предсказания, метод наименьших квадратов, метод инструментальных переменных и другие. В данной научной статье производится знакомство с параметрической идентификацией, а также объясняется суть каждого ее методов, описываются области и особенности их применения.

Ключевые слова: теория автоматического управления, модель, объект управления, идентификация, методы идентификации.

Methods of parametric identification of linear objects

Alpatov D.A.

Scientific adviser: Astapov V.N.

In the modern theory of automatic control, each model of the system is subject to identification. Its task is to determine the mathematical model of the control object that converts its input effects into output values. Structural schemes, algebraic, differential equations, Markov chains, and many more examples can be used as systematic models of objects. Accordingly, a certain type of identification should be applicable for each type of mathematical model. Currently, the following methods are most widely used in the identification of linear objects: the method of prediction errors, the method of least squares, the method of instrumental variables and others. This scientific work introduces parametric identification, explains the essence of each of its methods, and describes the areas and features of their application.

Keywords: automatic control theory, model, control object, identification, identification methods.

Введение

В последнее время в связи с предъявлением все более высоких требований к процессам управления в различных технических областях проблема идентификации становится исключительно важной. Невозможно обеспечить качественное управление системой, если параметры ее математической модели заранее не определены. Для построения такой модели могут быть использованы различные методы, включающие себя как использование теории, так и проведение экспериментов. Опыт, накопленный при проектировании систем управления, сообщает о том, что нельзя построить адекватную математическую модель, опираясь только лишь на теоретические сведения. Сформированная таким образом математическая модель, как правило, значительно отличается от реальной системы, что приводит соответственно к снижению качества управления. Поэтому в процессе проектирования систем управления одновременно с теоретическими исследованиями проводятся многочисленные эксперименты по определению и уточнению математической модели системы.

Понятие параметрической идентификации

По своей сути, параметрическая идентификация – это определение оптимальных параметров объекта управления системы при заданной ее структуре. Отсюда следует, что задача идентификации сводится, в общем случае, к определению оператора модели, преобразующего входные воздействия объекта в выходные величины [1]. Оператор объекта является его математической формализацией, т.е. математической моделью объекта, и может быть определен в соответствующих пространствах функций. Операторы могут характеризоваться разными структурой и характеристиками, и соответственно, задача идентификации объекта может иметь различные постановки. Представим модель объекта в виде следующей структурной схемы (рис. 1).

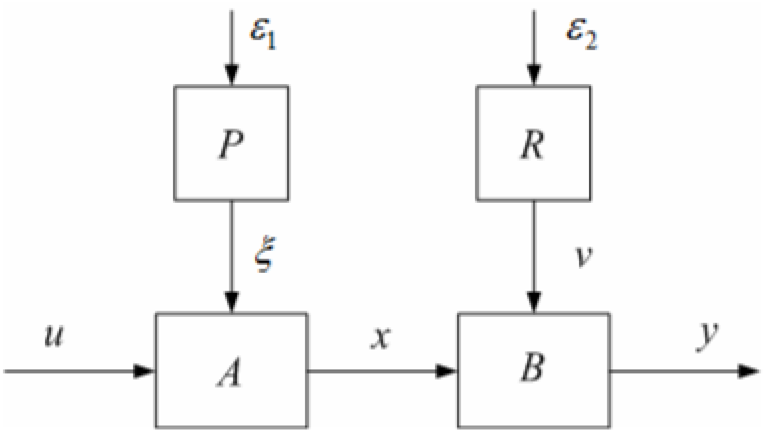

Рисунок 1 - Структурная схема объекта

На схеме приняты следующие обозначения:

u и **y** – входные и выходные сигналы системы. Такие сигналы могут быть предопределенными или случайными. Входной сигнал обычно еще называют задающим воздействием. Другие сигналы, так же подаваемые на вход называются помехами или возмущениями.

x – управляющее воздействие или наблюдаемый сигнал, который анализируют косвенно по сигналу y, полученному в результате преобразования оператором **B** в объекте управления;

$\boldsymbol{\varepsilon_1}$ и $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ – ненаблюдаемые помехи, которым свойственно оказывать вредное влияние на переходный процесс САУ, ухудшая ее точность. Чаще всего они являются случайными процессами типа белого шума, содержащие, в редких случаях, детерминированные составляющие.

ξ и $\boldsymbol{v}$ – обычно ненаблюдаемые параметры, представляющие собой случайные сигналы, коррелированные во времени.

A, B, P, R – искомые операторы, на нахождение которых, соответственно, и будет направлена основная задача идентификации. Вид таких операторов может быть как известен, так и нет.

Таким образом, изучив структурную схему и составляющие её параметры, описанные выше, можно выделить следующие основные задачи идентификации:

1) Задача нахождения характеристик (параметров) объекта. Она заключается в определении по известным наблюдаемым переменным $\mathbf{u}$ и $\mathbf{y}$ операторы (или параметры операторов) A и B. В некоторых случаях вместе с определением параметров A и B требуется определить параметры операторов P и R, которые преобразуют ненаблюдаемые белые шумы $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ и $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ в ненаблюдаемые сигналы $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{v}$.

2) Задача оценивания переменных состояния. Состояние объекта характеризуется многомерной переменной состояния, вектором, однозначно определяющим все его характеристики. По известным наблюдаемым случайным сигналам $\mathbf{u}$ и $\mathbf{y}$ при известных операторах **A, B, P, R** с известными параметрами требуется определить (оценить) ненаблюдаемый случайный сигнал **x** [2].

3) Задача генерации случайных сигналов с заданными характеристиками или определения оптимальных характеристик случайных сигналов. По наблюдаемым переменным $\mathbf{u}$ или $\mathbf{y}$ требуется определить оператор **P** или **R**.

Знакомство с методами параметрической идентификации

Возможные различные методы идентификации существенно зависят от разных форм представления математических моделей – обыкновенных дифференциальных, разностных уравнений, уравнений свертки и т.д. При этом ни один из методов идентификации не является универсальным для идентификации всех видов математических моделей, а используется в отдельных областях применения [3].

Наибольшее распространение при параметрической идентификации линейных объектов управления получили следующие рекуррентные методы:

1) метод ошибок предсказания (Гаусса, Ньютона), градиентные и другие;
2) метод наименьших квадратов;
3) методы инструментальных переменных;
4) метод моделирующих функций.

Метод ошибок предсказания

Данный метод сформулирован для дискретных систем на базе разностных схем. Определяется оценка параметров модели за n – итераций:

$$\boldsymbol{\theta_N} = argmin\, V_N(\theta). \tag{1.1}$$

В общем случае:

$$\boldsymbol{V_N(\theta)} = E\big[I\big(\varepsilon(t,\theta)\big)\big] = E\big[I\big(y(t) - y'\big(t(\theta)\big)\big). \tag{1.2}$$

где: $I(\varepsilon) -$ префильтр; $\varepsilon(t,\theta) -$ ошибка предсказаний.

Ошибка предсказаний – разность между выходным сигналом и его прогнозом на основе моделей в k-ый момент времени. Для выхода системы:

$$\boldsymbol{y(t)} = G(q) * u(t) + H(q) * e(t) = G(q) * u(t) + \upsilon(t). \tag{1.3}$$

Нужно сформировать прогноз $\boldsymbol{y'(t|t-1)}$ в момент времени **t** по данным, полученным на момент времени **t – 1** включительно, после чего вычислить ошибку предсказания:

$$\boldsymbol{\varepsilon(t)} = y'(t|t-1) - y(t). \tag{1.4}$$

Для оценки возможны два принципиально различных метода предсказания. Как известно, системы управления по источнику управляющего сигнала бывают двух основных типов – разомкнутые системы и замкнутые системы. Метод прямого предсказания используется в разомкнутых системах. Суть такой системы сводится к построению оценки в виде линейной комбинации уровней предшествующих элементов, обращаясь за этими данными к запоминающему устройству. Такой пример как раз приведен выше. Большой недостаток данного метода в том, что оценки, полученные на входе и на выходе, будут существенно различаться между собой, что, в конечном счете, приведет к потере устойчивости системы.

Метод обратного предсказания используется в замкнутых системах с обратной связью. Преимущество такого метода заключается в том, что в передатчике получается оценка в виде линейной комбинации прошлых ошибок предсказания

Метод наименьших квадратов

Данный метод служат базовым подходом к параметрической идентификации. В нем благодаря линейности и дискретному времени, по которому происходит работа объекта управления, определение параметров сводится к простым и универсальным решениям [3]. Задачи идентификации в данном случае сводится к следующему: по имеющимся необходимым данным, полученным по результатам наблюдения за входным и выходным сигналами с интервалом дискретизации Δt, требуется оценить значения параметров, обеспечивающих минимальное значение функционала невязки между рассчитанными и фактическими данными.

$$\boldsymbol{J} = (y - U\beta)^T(y - U\beta) = e^T e = \sum_{j=1}^{N} e^2(j). \quad (1.5)$$

Здесь величина $\boldsymbol{e(j) = y(j) - y_M(j), j = 1, 2 \ldots N}$ представляет невязку, определенную как разность между выходом исследуемого объекта y и реакцией, вычисленной по математической или физической модели объекта. Невязка определяется различными помехами и шумами, которые оказывают влияние на объект управления, а также остальные воздействия окружающей среды. Однако, независимо от происхождения возникающих ошибок, метод наименьших квадратов минимизирует сумму квадратичной невязки для дискретных значений.

Оценка по МНК $\boldsymbol{\beta}^*$, минимизирующая критерий (1.5), находится из условия существования минимума функционала:

$$\boldsymbol{J} = min_\beta J = J|_{\beta=\beta^*}. \quad (1.6)$$

Важным свойством оценок по МНК является существование только одного локального минимума, совпадающего с глобальным. Поэтому оценка $\boldsymbol{\beta}^*$ является единственной. Ее значение определяется из условия экстремума функционала (1.6):

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial \boldsymbol{\beta}}|_{\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^*} = 2U^T(y - U\beta^*) = 0. \quad (1.7)$$

Из (1.7) следует соотношение, определяемое систему нормальных уравнений:

$$U^T U\beta^* = U^T y. \quad (1.8)$$

Таким образом, в общем случае, если $U^T U$ является невырожденной матрицей, оценки $\boldsymbol{\beta}^*$ по методу наименьших квадратов получаются решениям матричного уравнения (1.8):

$$\boldsymbol{\beta}^* = [U^T U]^{-1} U^T y. \quad (1.9)$$

Метод инструментальных переменных

Такой метод является усовершенствованием метода наименьших квадратов, он применяется в случае, если оценка МНК не будет стремиться к нулевой из – за наличия смещения между математическим ожиданием оценки $\boldsymbol{\beta}^*$ от истинного вектора $\boldsymbol{\beta}$. Эта величина интерпретируется как смещение компонента вектора оценки. Наличие такого параметра может существенно повлиять на оценку параметров объекта управления. Эту проблему можно уменьшить за счет использования инструментальных переменных [4].

Метод инструментальных переменных предполагает наличие набора переменных $\boldsymbol{Z}$, называемых инструментами. Инструменты должны быть некоррелированные с ошибкой $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e} - \boldsymbol{E\beta}$ и, напротив, как можно сильнее коррелированны с регрессорами $\boldsymbol{U}$. Количество инструментов должно быть не меньше количества регрессоров.

Как только инструменты выбраны, можно применить двухшаговый МНК для оценивания вектора $\boldsymbol{B}$. На первом шаге находятся обычные МНК-оценки $\boldsymbol{B}^* = [\boldsymbol{Z^T Z}]^{-1}\boldsymbol{Z^T X}$

матрицы параметров $\boldsymbol{B}$ уравнения регрессии $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{ZB} + \boldsymbol{V}$. В результате получаем следующие оценки исходных переменных $\boldsymbol{X}$:

$$\boldsymbol{X}^* = ZB^* = Z[Z^T Z]^{-1} Z^T X = P_z X, \tag{1.10}$$

где $\boldsymbol{P_z} = \boldsymbol{Z}[\boldsymbol{Z}^T \boldsymbol{Z}]^{-1} \boldsymbol{Z}^T$.

На втором шаге также обычным МНК оценивается исходная модель (1.9) с заменой регрессоров $\boldsymbol{U}$ на их оценки (1.10), полученные на первом шаге:

$$\boldsymbol{\beta}_{IV}^* = (X^{*T} X^*)^{-1} X^{*T} x = (X^T P_Z^T P_Z X)^{-1} X^T P_Z^T x. \tag{1.11}$$

Учитывая, что $\boldsymbol{P_Z^T} = \boldsymbol{P_z}, \boldsymbol{P_Z^T P_z} = \boldsymbol{P_z}$, окончательно получаем формулу оценок метода инструментальных переменных:

$$\boldsymbol{\beta}_{IV}^* = (X^T P_z X)^{-1} X^T P_z x,\ \boldsymbol{P}_z = Z[Z^T Z]^{-1} Z^T \tag{1.12}$$

Метод моделирующих функций

Метод моделирующих функций не требует перехода от непрерывного времени к дискретному. Для определения нужных параметров объекта управления происходит вычисление площадей под кривыми, образованными перемножением переходных функций на специально сформированные функции в виде затухающих экспонент (рис. 2). После вычисления площадей составляется и решается система линейных уравнений относительно коэффициентов полиномов числителя и знаменателя передаточной функции объекта управления.

Рисунок 2 - Вычисление площадей под кривыми

В качестве одного из методов нахождения площади можно использовать геометрический смысл определенного интеграла. Его суть заключается в том, что площадь плоских фигур определяется через определённый интеграл от неотрицательной функции и равна площади криволинейной трапеции (рис. 3). Для вычисления данного интеграла следует воспользоваться формулой Ньютона – Лейбница представленной ниже:

$$\boldsymbol{S} = \int_a^b f(x)dx = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) \tag{1.13}$$

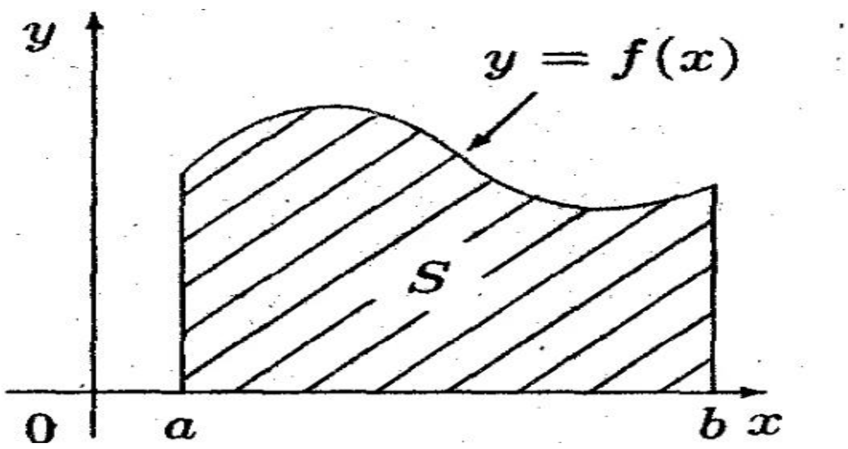

Рисунок 3 – Метод Ньютона-Лейбница

Подводя небольшой итог про данный метод идентификации, следует отметить, что класс входных сигналов при использовании метода моделирующих функций ограничен ступенчатыми функциями, соответственно, он применим только для предварительной идентификации.

Заключение

Обобщая вышесказанное, можно сказать, что предметом теории идентификации являются методы определения математических моделей по результатам экспериментальных исследований. В зависимости от объема предоставленной информации о системе различают задачи идентификации в широком и узком смысле. При решении задач идентификации в широком смысле данная информация о системе либо незначительна, либо вообще отсутствует. Система представляется в виде «черного ящика», и для ее идентификации необходимо решение ряда дополнительных задач, связанных с выбором класса модели, оценкой стационарности, линейности и др. При решении задачи идентификации в узком смысле считается, что известны структура системы и класс моделей, к которому она относится. Такая постановка задачи идентификации и встречает различные решения, описанные выше, поскольку наиболее соответствует реальным условиям проектирования и, соответственно, широко используется в инженерной практике.

Список используемой литературы

1) Дилигенская А.Н. Идентификация объектов управления. С.:СамГТУ, 2012. – 130

с.

2) Штейнберг Ш.Е. Идентификация в системах управления. - М.: Энергоатомиздат, 2011. – 80 с.

3) Метод наименьших квадратов [Электронный ресурс]. URL: http://repo.ssau.ru/bitstream/Metodicheskie-izdaniya/Metod-naimenshih-kvadratov-Elektronnyi-resurs-metod-ukazaniya (дата обращения - 05.10.2021).

4) Копытин А.В., Копытина Е.А. Применение метода инструментальных переменных для параметрический идентификации распределенной динамической системы. В.:ВГУ, 2018. – 5 с.

5) Гроп Д. Методы идентификации систем. М.:МИР, 2011. – 300 с.