004.932

ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СЛОЖНЫХ ТЕКСТУРНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Каюков И.Ю. [1]

[1]*ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», Самара, e-mail:* Igoryn.Kayukov@yandex.ru

Аннотация. Графическое представление информации является одной из наиболее распространенных форм представления знаний и выступает в качестве как объекта, так и результата исследований. С ростом сложности научно-технических задач и количества научных исследований обработка и анализ графической информации требуют разработки новых подходов, основанных на новых математических теориях. Одним из таких подходов служит теория фракталов. Понятия "фрактал" и "фрактальная геометрия", появившиеся в конце 70-х гг., с середины 80-х гг. прочно вошли в обиход математиков и программистов. Фракталами называются геометрические объекты (линии, поверхности, пространственные тела), имеющие сильно изрезанную форму и обладающие свойством самоподобия. Более строго фрактал можно определить как множество, хаусдорфова размерность которого строго больше (или меньше) топологической размерности. Фрактальная кривая в идеале на сколь угодно малом масштабе не вырождается в прямую и является в общем случае геометрически нерегулярной, хаотической. Для нее не существует и понятия касательной в точке, так как функции, описывающие эти кривые, являются в общем случае не дифференцируемыми. Измеряя размер, например, длину объекта, при увеличении масштаба мы получаем все более возрастающее ее значение. В данной работе был описан фрактальный анализ текстурных изображений, была рассмотрена классификация фракталов.

Ключевые слова: Фрактал, фрактальная кривая, графическая информация, математика, фрактальные множества.

004.932

FRACTAL ANALYSIS OF COMPLEX TEXTURE IMAGES

Kayukov I.Yu. [1]

[1]*Samara State Technical University, Samara, e-mail:* Igoryn.Kayukov@yandex.ru

Annotation. Graphical representation of information is one of the most common forms of knowledge representation and acts as both an object and a result of research. With the growing complexity of scientific and technical problems and the number of scientific studies, the processing and analysis of graphic information require the development of new approaches based on new mathematical theories. One such approach is the theory of fractals. The concepts of "fractal" and "fractal geometry", which appeared in the late 70s, since the mid-80s. firmly entered the everyday life of mathematicians and programmers. Fractals are geometric objects (lines, surfaces, spatial bodies) that have a strongly jagged shape and have the property of self-similarity. More strictly, a fractal can be defined as a set whose Hausdorff dimension is strictly greater than (or less than) the topological dimension. A fractal curve, ideally, on an arbitrarily small scale does not degenerate into a straight line and is, in the general case, geometrically irregular, chaotic. For it, there is also no concept of a tangent at a point, since the functions describing these curves are generally not differentiable. By measuring the size, for example, the length of an object, as we zoom in, we get an ever-increasing value. In this article, the fractal analysis of texture images was described, the classification of fractals was considered.

Keywords: Fractal, fractal curve, graphical information, mathematics, fractal sets.

Фракталы — удивительные математические объекты, подкупающие своей простотой и богатыми возможностями по построению объектов сложной природы при помощи всего лишь нескольких коэффициентов и простой итеративной схемы.

Именно эти возможности и позволяют использовать их для сжатия изображений, особенно для фотографий природы и прочих сложных самоподобных изображений.

Фрактал – структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому. Фрактал выглядит одинаково, в каком бы масштабе мы его не наблюдали. Но, располагая только внешним видом, оценка фрактальных свойств затруднена, а в большинстве случаев невозможна.[1]

Основные свойства фрактальных множеств:

1. фрактал имеет тонкую структуру, то есть содержит произвольно малые масштабы;
2. фрактал слишком нерегулярное множество, чтобы быть описанным на традиционном геометрическом языке;
3. фрактал имеет форму самоподобия (приближенную или статистическую);
4. фрактальная размерность больше топологической размерности;
5. в большинстве случаев фрактал определяется очень просто, например, рекурсивно. [1]

Классификация фракталов.

Геометрические фракталы — самые наглядные фракталы, в двухмерном случае их получают с помощью ломаной (или поверхности в трехмерном случае), называемой генератором. За один шаг алгоритма каждый из отрезков, составляющих ломаную, заменяется на ломаную-генератор в соответствующем масштабе. В результате бесконечного повторения этой процедуры получается геометрический фрактал. [2]

Алгебраические фракталы — получают их с помощью нелинейных процессов в n-мерных пространствах. Наиболее изучены двухмерные процессы.

Стохастические фракталы — получаются в том случае, если в итерационном процессе хаотически менять какие-либо его параметры. При этом получаются объекты очень похожие на природные — несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т.д. Двумерные стохастические фракталы используются при моделировании рельефа местности и поверхности моря. [2]

Существуют и другие классификации фракталов, например деление фракталов на детерминированные и недетерминированные. [2]

Классификация фракталов представлена См. Рисунок 1.

Рисунок 1 – Классификация фракталов

Фрактальный анализ оценивает фрактальные характеристики данных.

Он состоит из нескольких методов для присвоения фрактальной размерности и других фрактальных характеристик набору данных, который может быть теоретическим набором данных или шаблоном или сигналом, извлеченным из явлений, включая естественные геометрические объекты, экологию и водные науки, звук, колебания рынка, частота сердечных сокращений, частотная область в сигналах электроэнцефалографии , цифровых изображениях, молекулярном движении и науке о данных.

Фрактальный анализ сейчас широко используется во всех областях науки. Важным ограничением фрактального анализа является то, что достижение эмпирически определенной фрактальной размерности не обязательно доказывает, что модель фрактальна; скорее, необходимо учитывать другие существенные характеристики.

Фрактальный анализ ценен для расширения наших знаний о структуре и функциях различных систем и как потенциальный инструмент для математической оценки новых областей исследования. [2]

Фракталы имеют дробные измерения, которые являются мерой сложности , которая указывает степень которые объекты заполняют доступное пространство. Фрактальная размерность измеряет изменение «размера» фрактального множества с изменяющейся шкалой наблюдений и не ограничивается целыми значениями. Это возможно при условии, что меньшая часть фрактала похожа на целое, показывая одни и те же статистические свойства в разных масштабах. Эта характеристика называется масштабной инвариантностью, и может быть дополнительно классифицирована как самоподобие или самоаффинность, последняя масштабируется анизотропно (в зависимости от направления).

Независимо от того, расширяется ли фрактал или сужается, структура остается неизменной и выглядит столь же сложной. Фрактальный анализ использует эти основные свойства, чтобы помочь в понимании и характеристике сложных систем. Также возможно расширить использование фракталов за счет отсутствия единой характерной временной шкалы или паттерна. [3]

Цвет и текстура являются важными характеристиками изображения. Анализ цветных текстур включает в себя их описание и классификацию, т.е. формирование кластеров и сегментацию (разбиение изображения на области, которые являются однородными относительно одной или нескольких характеристик либо принадлежат некоторому кластеру).

Под кластером понимается группа объектов, образующих в пространстве описания компактную в некотором смысле область.

Так, фракталы используются при анализе текстурных изображений ландшафтов, полученных при аэрокосмической съемке, при анализе поверхностей порошков и других пористых сред, при анализе облаков и т.д.

Размер фрактала представляет собой характеристику сложности поверхности и принимает значения в диапазоне от 2 до 3: меньшим значениям размера фрактала соответствуют гладкие поверхности, а большим — более сложные изрезанные поверхности. [4]

При сегментации цветных текстур необходимо учитывать как пространственные характеристики, так и характеристики цветности. Эффективность выбора признаков зависит от выбора цветового координатного пространства, при этом наиболее информативным из цветовых признаков является компонент тона. Осуществляется преобразование цветового координатного пространства RGB в пространство LSH.

Оценка размера фрактала производится по яркостному компоненту изображения. Хотя размер фрактала инвариантен к изменению масштаба, природные поверхности не обладают одинаковым размером фрактала во всем возможном диапазоне масштабов. Оценка фрактальности текстуры является важной характеристикой при сегментации изображений по размеру фрактала. Фрактальность текстуры оценивается по монотонности изменения характеристики фрактала в зависимости от шага оценивания. Диапазон допустимых значений шагов определяется интервалом монотонности.

Размер фрактала цветной текстуры во многом зависит от выбора метода оценивания. Сопоставление текстур возможно при использовании одного и того же метода (группы методов). Более того, не всякие текстуры хорошо различимы по размеру фрактала. В связи с этим прежде чем включать в систему признаков размер фрактала, необходимо оценить фрактальность текстуры.

Оценка фрактальности текстуры производится на основе выбранного метода оценивания размера фрактала.

Размер фрактала оценивается по формуле

D = K-01 (1)

где K=2 или 3 в зависимости от алгоритма оценивания, 01 — тангенс угла наклона линии выборочной регрессии.

Поскольку размер фрактала вычисляется через оценку выборочной регрессии, то естественно оценивать фрактальность текстуры по коэффициенту корреляции между логарифмом случайной величины и логарифмом заданной функции шага. [4]

При этом для принятия решения о фрактальности текстуры необходимо произвести следующие действия:

I. построить зависимость коэффициента корреляции от задаваемого шага; значение шага, при котором функция имеет максимум, является максимальным;

II. при использовании методов, в которых оценка размера фрактала принимается как среднее значение для серии экспериментов, не учитывать размер фрактала при низких значениях коэффициента корреляции;

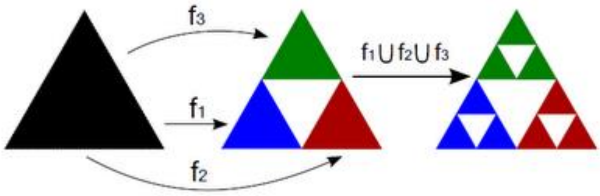
III. при низких значениях коэффициента корреляции не включать размер фрактала в систему признаков для сегментации текстур. [4]

Метрика — функция, заданная на пространстве, возвращающая расстояние между двумя точками этого пространства. Например, привычная нам Эвклидова метрика. Если на пространстве задана метрика, оно называется метрическим. Метрика должна удовлетворять определенным условиям, но не будем углубляться. [5]

Сжимающее отображение (преобразование) — функция на метрическом пространстве, равномерно уменьшающая расстояние между двумя точками пространства. [5]

Несколько аффинных сжимающих отображений образуют систему итерированных функций (СИФ). По сути, СИФ — это множительная машина. Она принимает исходное изображение, искажает его, перемещает, и так несколько раз.

Например, вот так при помощи СИФ из трех функций строится треугольник Серпинского. (Рисунок 2) [5]



$$f_1\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$
$$f_2\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1/2\\0\end{bmatrix}$$
$$f_3\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1/4\\\sqrt{3}/4\end{bmatrix}$$

Рисунок 2 – Треугольник Серпинского

Исходный треугольник три раза множится, уменьшается и переносится. И так далее. Если так продолжать до бесконечности, получим известный фрактал площадью 0 и размерностью 1,585.

Если функции, входящие в СИФ,— сжимающие, то сама СИФ тоже имеет неподвижную точку. Вот только эта «точка» будет уже не привычной нам точкой в N-мерном пространстве, а множеством таких точек, то есть изображением. Оно называется *аттрактором* СИФ. Для СИФ, приведенной выше, аттрактором будет треугольник Серпинского.

Переходим в пространство изображений. В этом пространстве:

- Точка пространства — это изображение.
- Расстояние между точками показывает, насколько похожи изображения между собой, насколько «близки» (естественно, если его задать соответствующим образом).
- Сжимающее отображение делает два любых изображения более похожими (в смысле заданной метрики). [5]

Имея СИФ, найти аттрактор просто. Во всяком случае, имея под рукой компьютер. Можно взять абсолютно любое начальное изображение и начать применять к нему СИФ. Пример с тем же треугольником, но уже построенным из квадрата (Рисунок 3).

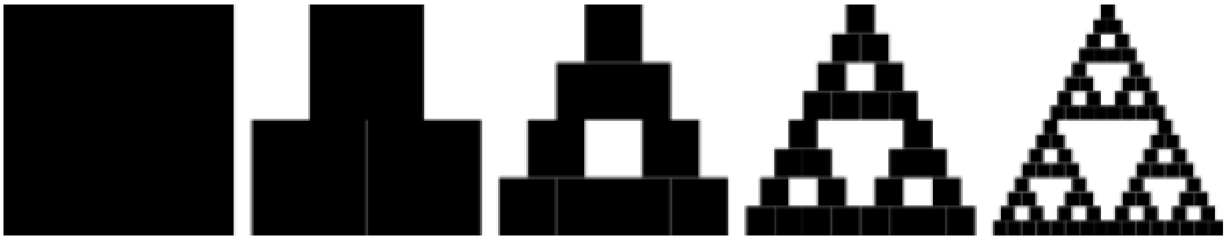


Рисунок 3 – Применение СИФ на квадрат

Получается, что для построения довольно сложной фигуры нам потребовалось 18 коэффициентов. Выигрыш налицо.

Если бы умели решать обратную задачу — имея аттрактор, строить СИФ. Тогда достаточно взять аттрактор-изображение, похожее на фотографию вашей кошки и можно довольно выгодно его закодировать.

Вот здесь начинаются проблемы. Произвольные изображения, в отличие от фракталов, не самоподобны, так что так просто эта задача не решается.

Самоподобие нам нужно обязательно — иначе ограниченные в своих возможностях аффинные преобразования не смогут правдоподобно приблизить изображения. А если его нет между частью и целым, то можно поискать между частью и частью. [5]

Упрощенная схема кодирования выглядит так:

1. Изображение делится на небольшие неперекрывающиеся квадратные области, называемые ранговыми блоками. По сути, разбивается на квадраты.
2. Строится пул всех возможных перекрывающихся блоков в четыре раза больших ранговых — доменных блоков.
3. Для каждого рангового блока по очереди «примеряем» доменные блоки и ищем такое преобразование, которое делает доменный блок наиболее похожим на текущий ранговый.
4. Пара «преобразование-доменный блок», которая приблизилась к идеалу, ставится в соответствие ранговому блоку. В закодированное изображение сохраняются коэффициенты преобразования и координаты доменного блока. Содержимое доменного блока нам ни к чему — вы же помните, нам все равно с какой точки стартовать.

На Рисунке 4 ранговый блок обозначен жёлтым, соответствующий ему доменный — красным. Также показаны этапы преобразования и результат.

Недостаток схемы виден невооруженным глазом.

Сколько доменных блоков размером 32×32 содержит двухмегапиксельное изображение ?

Полный их перебор для каждого рангового блока и есть основная проблема такого вида сжатия — кодирование занимает очень много времени.

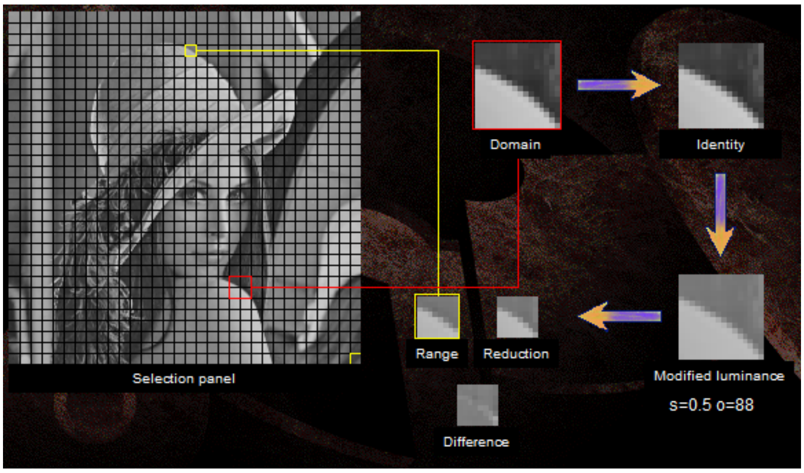


Рисунок 4 – Кодирование изображения

Декодирование же производится просто и довольно быстро. Берем любое изображение, делим на ранговые области, последовательно заменяем их результатом применения соответствующего преобразования к соответствующей доменной области.

Список используемой литературы

1. Бондаренко В.А., Дольников В.Л. Фрактальное сжатие изображений по Барнсли-Слоану. // Автоматика и телемеханика.-1994.-N5.-с.12-20. (дата обращения: 21.05.2021).
2. Ватолин Д. Применение фракталов в машинной графике.// Computerworld-Россия.-1995.-N15.-с.11. (дата обращения: 21.05.2021).
3. Мандельброт Б. Самоаффинные фрактальные множества,"Фракталы в физике" -М.:Мир, (1988),672 с. (дата обращения: 21.05.2021).
4. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. -- М.: «Институт компьютерных исследований», 2002. (дата обращения: 21.05.2021).
5. Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. М.: Мир, 1993. (1986 - оригинал) 176 с. (дата обращения: 21.05.2021).